Решения задач

9 класс

9.1. Пусть t — общий корень данных многочленов. Тогда $0 = P(P(P(t))) = P(P(0))$. Пусть $P(x) = x^2 + ax + b$; тогда $P(0) = b$, $P(1) = a + b + 1$, а значит, $0 = P(P(0)) = P(b) = ab + b^2 + b = b(a + b + 1) = P(0) \cdot P(1)$, что и требовалось доказать.

9.2. Обозначим $\angle OBA = \angle OAB = \alpha$, $\angle OBC = \angle OCB = \gamma$; тогда $\angle ACB = \frac{1}{2}\angle AOB = 90^\circ - \alpha$. Поскольку четырёхугольник $BPOQ$ вписан, $\angle OPQ = \alpha$ и $\angle OQP = \gamma$. Пусть OO_1 — высота треугольника OPQ, а H — точка пересечения прямых OO_1 и AC (см. рис. 1). Без ограничения общности, точка H лежит на луче CA.

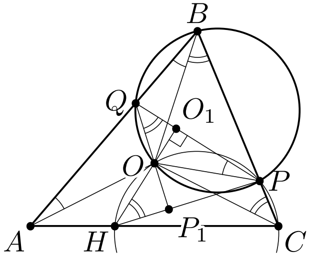

Рис. 1

Угол POH — внешний для $\triangle POO_1$, поэтому $\angle POH = 90^\circ + \alpha = 180^\circ - \angle HCP$. Значит, четырёхугольник $CHOP$ вписан, и $\angle PHO = \angle PCO = \gamma$. Пусть P_1 — точка пересечения прямых OQ и PH. Вновь по свойству внешних углов $\angle QP_1H = \angle QPH + \angle PQO = \angle QPH + \angle PHO_1 = \angle HO_1Q = 90^\circ$. Итак, $PH \perp OQ$, то есть H — точка пересечения высот треугольника OPQ. При этом она лежит на прямой AC, что и требовалось доказать.

Замечание. Нетрудно показать, что треугольники ABC и PHQ подобны.

9.3. **Ответ.** 4016.

Первое решение. Покажем, что в выпуклом n-угольнике максимальное количество диагоналей, которое можно провести указанным способом, равно $2n - 6$; при $n = 2011$ тогда получится указанный ответ. Пусть $A_1A_2\ldots A_n$ — данный многоугольник. Тогда Петя может провести последовательно диагонали A_2A_4, A_3A_5, A_4A_6, $\ldots$, $A_{n-2}A_n$, а затем — диагонали A_1A_3, A_1A_4, A_1A_5, $\ldots$, A_1A_{n-1}, итого $2n-6$ диагоналей. На рисунке приведён пример при $n=9$.

Покажем теперь индукцией по n, что больше $2n-6$ диагоналей в выпуклом n-угольнике провести описанным способом нельзя. База при $n=3$ тривиальна. Для перехода рассмотрим процесс проведения диагоналей в многоугольнике $A_1A_2\ldots A_n$. Пусть для определённости A_1A_k — последняя проведённая диагональ. Тогда по условию она пересекает не более, чем одну проведённую ранее диагональ (обозначим её d, если она существует).

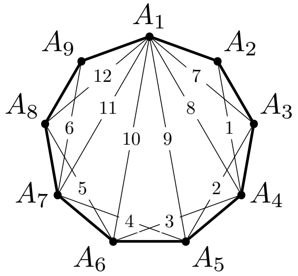

Рис. 2

Далее, все диагонали, кроме A_1A_k и, возможно, d, проводились либо в k-угольнике $A_1A_2\ldots A_k$, либо в $(n+2-k)$-угольнике $A_kA_{k+1}\ldots A_nA_1$, при этом в каждом из этих многоугольников они проводились с выполнением условий. Значит, по предположению индукции, этих диагоналей не больше $(2k-6)+(2(n+2-k)-6)=2n-8$. Учитывая две диагонали A_1A_k и d, получаем, что общее количество не больше $2n-8+2=2n-6$, что и требовалось.

Второе решение. Приведём другое доказательство того, что в выпуклом n-угольнике можно провести не более $2n-6$ диагоналей с соблюдением условия задачи.

Будем красить проводимые диагонали в красный и синий цвета так. Первую диагональ окрасим синим; далее, если вновь проведённая диагональ пересекает синюю, то окрасим её красным, иначе — синим. Тогда ясно, что одноцветные диагонали не будут пересекаться по внутренним точкам.

Докажем, что диагоналей каждого цвета не больше $n-3$; отсюда будет следовать, что всего их не более $2(n-3)$. Действительно, пусть есть k одноцветных диагоналей. Поскольку они не имеют общих внутренних точек, они разбивают n-угольник на $k+1$ многоугольников. У каждого многоугольника хотя бы три стороны, значит, суммарное количество S их сторон не меньше $3(k+1)$. С другой стороны, стороны этих многоугольников — это наши диагонали (каждая посчитана по два раза) и стороны исходного n-угольника (посчитанные по одному разу). Значит, $S=n+2k$. Итак, $n+2k\geqslant 3(k+1)$, или $k\leqslant n-3$, что и требовалось доказать.

9.4. **Ответ.** Не существуют.

Первое решение. Предположим противное: пусть нашлись такие числа a, b, c. Заметим, что числа $a+b$, $b+c$, $c+a$ попарно взаимно просты. В самом деле, пусть, скажем, числа $a+b$, $b+c$ делятся на некоторое простое p. Поскольку $c^2 \vdots (a+b)$, $a^2 \vdots (b+c)$, то числа c и a также делятся на p, а тогда и $b=(a+b)-a$ на него делится, что противоречит условию.

Далее, поскольку $a^2 \vdots (b+c)$, число $(a+b+c)^2 = a^2+(b+c)(2a+b+c)$ делится на $b+c$. Аналогично, оно делится на $a+b$ и на $c+a$. Так как последние три числа попарно взаимно просты, $(a+b+c)^2$ делится на $(a+b)(a+c)(b+c)$; в частности, $(a+b+c)^2 \geqslant (a+b)(b+c)(c+a)$. С другой стороны, ясно, что все числа a, b, c не меньше 2, значит,

$$(a+b)(b+c)(c+a) = (a^2b+b^2c+c^2a)+(ab^2+bc^2+ca^2)+2abc > \\ > (2a^2+2b^2+2c^2)+(2ab+2bc+2ca) > (a+b+c)^2.$$

Противоречие.

Второе решение. Как и в первом решении, заметим, что числа $a+b$, $b+c$, $c+a$ попарно взаимно просты. Пусть $a\geqslant b\geqslant c$. Заметим, что число $b^2+c^2-a^2=(b+a)(b-a)+c^2$ делится на $b+a$; аналогично, оно делится на $c+a$. Значит, $b^2+c^2-a^2 \vdots (a+b)(a+c)$. С другой стороны,

$$-(a+b)(a+c) < -a^2 < b^2+c^2-a^2 \leqslant a^2 < (a+b)(a+c).$$

Такое может случиться лишь при $b^2+c^2-a^2=0$, то есть при $a^2=b^2+c^2$.

Итак, $a^2=b^2+c^2 \vdots (b+c)$. Тогда число $2b^2=(b^2+c^2)+(b-c)(b+c)$ также делится на $b+c$. Поскольку числа b и $b+c$ взаимно просты, $2 \vdots (b+c)$, откуда $b=c=1$. Но тогда $1=c^2$ не может делиться на $a+b>1$, противоречие.