10 класс

10.5. **Ответ.** Не могли.

Предположим противное. Если среди исходных чисел есть ноль, то для любого другого числа a имеем $a^2 - 0^2 = (a - 0)^2$. Значит, если вычеркнуть ноль, то останутся 9 чисел, также удовлетворяющих условию.

Итак, можно считать, что исходных чисел 9 или 10, и все они ненулевые. Пусть среди них есть числа разных знаков; рассмотрим минимальное и максимальное из них — обозначим их $a < 0 < b$. Тогда у Васи присутствует число $(b - a)^2$, которое больше как a^2, так и b^2; у Пети же любое число не превосходит $\max(a^2, b^2)$. Противоречие.

Значит, все исходные числа — одного знака; заменив, если надо, все числа на противоположные, можно считать, что все они положительны. Опять обозначив через a и b соответственно минимальное и максимальное из этих чисел, имеем $b^2 - a^2 = (b - a)(b + a) > (a - b)^2 \geqslant (c - d)^2$, где c и d — произвольные два исходных числа. Тогда число $b^2 - a^2$ не встретится на листке у Пети, но встретится у Васи — противоречие.

10.6. Точки B_1 и C_1 лежат на окружности, построенной на BC как на диаметре. Для решения достаточно доказать, что F также лежит на этой окружности, то есть достаточно доказать, что четырёхугольник CB_1FC_1 — вписанный.

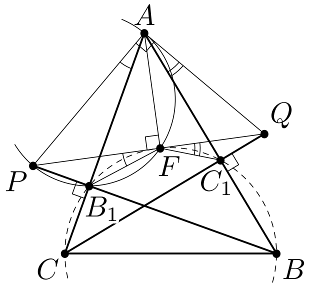

Рис. 5

Так как $\angle AB_1P = \angle AFP = 90^\circ$, то точки B_1 и F лежат на окружности, построенной на AP как на диаметре. Поэтому $\angle PFB_1 = \angle PAB_1$. Аналогично $\angle QFC_1 = \angle QAC_1$. Имеем $\angle B_1FC_1 = 180^\circ - \angle PFB_1 - \angle QFC_1 = 180^\circ - \angle PAB_1 - \angle QAC_1 = 180^\circ - (\angle PAQ - \angle B_1AC_1) = 90^\circ + \angle B_1AC_1 = 90^\circ + (90^\circ - \angle ACC_1) = 180^\circ - \angle B_1CC_1$. Таким образом, четырёхугольник CB_1FC_1 — вписанный.

10.7. **Ответ.** 2.

При $a = 4$, $b = 2$ имеем $\dfrac{a^1 - 1}{b^1 - 1} = 3$, $\dfrac{a^2 - 1}{b^2 - 1} = 5$. Осталось показать, что больше двух простых чисел подряд не встретится.

Докажем более сильное, чем требуется, утверждение: при $n \geqslant 2$ хотя бы одно из чисел $\dfrac{a^n - 1}{b^n - 1}$, $\dfrac{a^{n+1} - 1}{b^{n+1} - 1}$ не является простым. Предположим противное; тогда

$$(a-1)(a^{n-1} + \ldots + a + 1) = p(b-1)(b^{n-1} + \ldots + b + 1), \quad (1)$$
$$(a-1)(a^{n} + \ldots + a + 1) = q(b-1)(b^{n} + \ldots + b + 1), \quad (2)$$

где p и q — простые числа.

Предположим, что $a-1$ не делится на $b-1$. Тогда некоторое простое число r входит в разложение числа $b-1$ в степени большей, чем в $a-1$. Из (1) и (2) получим что r — общий делитель чисел $a^{n-1} + \ldots + a + 1$ и $a^n + \ldots + a + 1$, но

$$\text{НОД}(a^{n-1} + \ldots + a + 1, a^n + \ldots + a + 1) = \\ = \text{НОД}(a^{n-1} + \ldots + a + 1, a^n) = 1.$$

Противоречие.

Итак, число $k = \dfrac{a-1}{b-1}$ целое. Из (1) имеем

$$k(a^{n-1} + \ldots + a + 1) = p(b^{n-1} + \ldots + b + 1),$$

причем $1 < k < p$, так как $b^{n-1} + \ldots + b + 1 < a^{n-1} + \ldots + a + 1$. Значит, НОД$(k, p) = 1$, поэтому $b^{n-1} + \ldots + b + 1 \,\vdots\, k$. Аналогично, из (2) вытекает, что $k < q$ и $b^n + \ldots + b + 1 \,\vdots\, k$. Но это противоречит тому, что НОД$(b^{n-1} + \ldots + b + 1, b^n + \ldots + b + 1) = 1$.

Замечание. Двумя последовательными простыми чисел в такой последовательности могут быть любые два простых числа вида $p = b + 1$, $q = b^2 + 1$. Действительно, полагая $a = b^2$, имеем $p = \dfrac{a-1}{b-1}$, $q = \dfrac{a^2 - 1}{b^2 - 1}$. Такими парами являются, например, $(7, 37)$, $(11, 101)$ и $(2^{2^3} + 1, 2^{2^4} + 1)$.

10.8. Обозначим $n = 2010/3 = 670$. Назовём *линией* строку или столбец; пронумеруем строки сверху вниз, а столбцы — слева направо. Заметим, что для выполнения условий задачи достаточно, чтобы при любом k в левых k столбцах и в верхних k строках содержалось бы по kn отмеченных клеток.

Скажем, что уголок *смотрит из i-й вертикали влево*, если две его клетки находятся в i-й вертикали, а третья — левее. Аналогично определим взгляд в других трёх направлениях; каждый уголок, таким образом, смотрит в двух направлениях.

Отметим для начала в каждом уголке среднюю клетку. Теперь в каждом уголке можно либо оставить клетку на месте, либо сдвинуть её ровно в одном из двух направлений, в которые этот уголок смотрит. Выясним, сколько таких сдвигов надо сделать.

Наложим дополнительное условие: между каждыми двумя соседними линиями все сдвиги должны идти в одну сторону. Рассмотрим, скажем, два соседних столбца: k-й и $(k+1)$-й. Предположим, что в левых k столбцах сейчас содержится $d_k \geqslant nk$ отмеченных клеток. Далее, пусть в k-м столбце есть a_k уголков, смотрящих вправо, в а $(k+1)$-м — b_k уголков, смотрящих влево. Тогда в первых k столбцах находится $\dfrac{3kn - 2a_k - b_k}{3}$ целых уголков, и потому $d_k = \dfrac{3kn - 2a_k - b_k}{3} + a_k = kn + \dfrac{a_k - b_k}{3}$. Значит, чтобы добиться нужного количества отмеченных, надо сдвинуть $s_k = \frac{a_k - b_k}{3} \leqslant \frac{a_k}{3}$ отмеченных клеток из k-го столбца вправо. В этом случае выделим $s_k = \frac{a_k - b_k}{3}$ непересекающихся пар среди a_k уголков, смотрящих из k-го столбца вправо, и потребуем, чтобы ровно в одном уголке из каждой пары клетка был сдвинута вправо. Аналогично, если $d_k < nk$, то мы выделим $\frac{b_k - a_k}{3}$ непересекающихся пар среди b_k уголков, смотрящих из $(k+1)$-го столбца влево.

Проделав такую операцию с каждой парой соседних линий, мы получим некоторое количество выделенных пар уголков, в каждой из которых надо выбрать по уголку; при этом все выбранные уголки должны быть различными. Осталось показать, что это возможно.

Соединим два уголка, находящиеся в одной паре, ребром. Заметим, что каждый уголок лежит не более, чем в двух парах: по одной на два направления, в которых он смотрит. Значит, мы получим граф, в котором из каждой вершины выходит не более двух рёбер. Тогда этот граф распадается на циклы и пути. Теперь в каждом цикле $U_1 - U_2 - \ldots - U_n - U_1$ в паре (U_i, U_{i+1}) выберем уголок U_i, а в паре (U_n, U_1) — уголок U_n. Аналогичную операцию проделаем с путём. Очевидно, что все условия выполнены — а значит, и задача решена.