Р Е ШЕ Н И Я   З А Д А Ч

II тур (100 баллов)

Математическая справка: $1+2+3+\ldots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$.

Задача 1 (15 баллов)

Предприниматель рассматривает возможность вложения средств в один из 10 проектов, характеризующихся различными значениями бухгалтерской прибыли. Кроме того, у него есть, конечно, возможность не вкладывать деньги ни в один из проектов. Других вариантов у предпринимателя нет, а альтернативные издержки при выборе одной из возможностей связаны только с отказом от реализации остальных. Известно, что:

- сумма бухгалтерских прибылей всех одиннадцати альтернатив равна 6 млн руб.;
- сумма экономических прибылей всех одиннадцати альтернатив равна (-25) млн руб.;
- экономическая прибыль лучшей из альтернатив равна 2 млн руб.;

Определите величину бухгалтерской прибыли лучшей из альтернатив.

Решение:

Всего мы имеем 11 альтернатив, причем бухгалтерская прибыль альтернативы «не вкладывать деньги никуда» равна 0.

Обозначим наибольшую из бухгалтерских прибылей через a_1, вторую по величине бухгалтерскую прибыль через a_2, и.т.д. Наименьшую бухгалтерскую прибыль обозначим через a_{11}. По первому условию, $a_1+a_2+\ldots+a_{11}=6$.

Альтернативные издержки реализации лучшей альтернативы равны a_2, в то время как альтернативные издержки реализации каждой из оставшихся альтернатив равны a_1. Значит, по второму условию $(a_1-a_2)+(a_2-a_1)+(a_3-a_1)+\ldots+(a_{11}-a_1)=-25$.

Преобразуя это уравнение, получаем, что $(a_3 + a_4 + \ldots + a_{11}) - 9a_1 = -25$.
Но из первого условия следует, что, с другой стороны, $a_3 + a_4 + \ldots + a_{11} = 6 - a_1 - a_2$.
Значит, $(6 - a_1 - a_2) - 9a_1 = -25$.
Теперь осталось учесть то, что $a_1 - a_2 = 2$ (третье условие).
Получаем систему

$$\begin{cases} 6 - 10a_1 - a_2 = -25 \\ a_1 - a_2 = 2 \end{cases}$$

Решая ее, получаем, что $a_1 = 3$.

Ответ: 3 млн руб.

Задача 2 (20 баллов)

Функция издержек совершенно конкурентной фирмы «The Gap» имеет вид $TC = 0,5Q^2$, однако фирма, в силу технологических ограничений, *не* может производить объемы выпуска из интервала (1;3).

(а) Найдите функцию предложения фирмы и постройте ее график.

(б) Фирма рассматривает возможность усовершенствования технологии, в результате которого функция издержек не изменится, однако станет возможным производство любого неотрицательного объема выпуска. При какой цене на продукцию фирмы ее готовность платить за такое усовершенствование максимальна? Чему равна эта максимальная готовность платить?

Решение:

(а) Функция предложения показывает, какой объем выпуска фирме оптимально производить при каждой цене. Фирма решает задачу максимизации прибыли:

$\pi(q) = pq - 0,5q^2 \to \max\limits_{q}$,

в которой p является параметром (совершенно конкурентная фирма не может влиять на цену). При этом выбор q происходит из множества $A = [0;1] \cup [3;+\infty)$. Таким образом, нам нужно найти точку максимума функции $\pi(q)$ на множестве A в зависимости от значения параметра p.

Заметим, что функция прибыли фирмы является параболой с ветвями, направленными вниз, и абсциссой вершины $q_в = p$.

Понятно, что если фирме доступно производство выпуска в количестве $q_в$, то она это количество и выберет (большего значения функции, чем в вершине параболы, добиться все равно никогда не удастся). Таким образом, при $q_в \in A$ (а значит, и $p \in A$) величина предложения фирмы совпадет с $q_в$. Итак, при $p \in A$ $q_s(p) = p$.

Что же будет происходить при $p \notin A$, то есть при $q_в \in (1;3)$?

В этой ситуации фирма уже не сможет предложить на рынок желаемое количество $q_в$. Представив параболу прибыли, нетрудно понять, что оптимальным выпуском в этом случае будет $q = 1$ или $q = 3$.

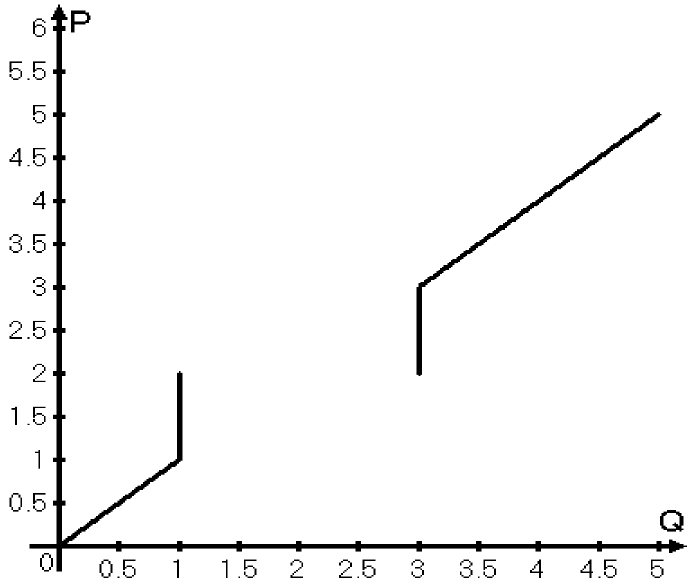
Сравним значения прибыли при производстве этих объемов выпуска:

$\pi(1) = p - 0,5$; $\pi(3) = 3p - 4,5$.

Решая неравенство $p - 0,5 \geq 3p - 4,5$, получаем, что $\pi(1) \geq \pi(3)$ при $p \leq 2$, соответственно при $p \in [1;2]$ величина предложения составит 1. Напротив, при $p \in [2;3]$ величина предложения составит 3. При $p = 2$ фирме безразлично, какой из объемов (1 или 3) производить. Суммируя все сказанное, получаем, что функция предложения фирмы имеет вид

$$q_s(p) = \begin{cases} p, \ 0 \leq p \leq 1 \\ 1, \ 1 \leq p \leq 2 \\ 3, \ 2 \leq p \leq 3 \\ p, \ p \geq 3 \end{cases}.$$

График этой необычной функции представлен на рисунке:



(б) Готовность фирмы платить за такое усовершенствование соответствует разнице между значениями ее максимальной прибыли при усовершенствовании и без него.

Без ограничений на объем выпуска функция предложения фирмы была бы $q_s = p$, и максимальная прибыль, которую получала бы фирма при цене p, равнялась бы $\pi_{\max} = p \cdot p - 0,5p^2 = 0,5p^2$.

С ограничениями выпуска, как мы уже нашли, максимальная прибыль фирмы равна $\pi(1) = p - 0,5$ при $p \in [1;2]$ и равна $\pi(3) = 3p - 4,5$ при $p \in [2;3]$. При остальных ценах максимальная прибыль совпадает с $0,5p^2$.

Таким образом, готовность фирмы платить за усовершенствование (V) равна

$$V(p) = \begin{cases} 0,5p^2 - (p-0,5) = 0,5(p-1)^2, \ 1 \le p \le 2 \\ 0,5p^2 - (3p-4,5) = 0,5(p-3)^2, \ 2 \le p \le 3 \\ 0, \text{ иначе} \end{cases}$$

Отсюда легко видеть, что готовность платить максимальна при $p = 2$ и равна 0,5.

Интуитивно это ясно: фирма готова платить за усовершенствование максимальную сумму, если существующее ограничение для нее максимально вредно, а это происходит при $q_в = 2$, то есть $p = 2$.

Примечание: оба пункта можно было решить графически, используя график MC и рассуждения о площадях.

Ответ: (а) см. выше. (б) $p = 2$, $V_{\max} = 0,5$.

Задача 3 (15 баллов)

Как-то Вася решал тест по теме «Безработица». В одном из вопросов, среди прочего, было сказано, что «в стране X работает больше половины населения, 70 % населения является трудоспособным, а каждый пятнадцатый житель страны не имеет работы, но активно ищет ее и готов приступить к работе немедленно». Найти же требовалось уровень безработицы в стране X. Не очень точно зная, что же такое «уровень безработицы», Вася решил найти по имеющимся у него данным долю трудоспособного, но не работающего населения во всем населении страны. Получившееся у него число оказалось среди предлагавшихся вариантов ответа, и, обрадовавшись, Вася смело обвел нужный вариант. Позднее, узнав результаты тестирования, Вася обрадовался еще больше: его ответ был засчитан как правильный!

Найдите ответ Васи.

Решение:

Пусть U — количество безработных, E — количество занятых, T — количество трудоспособных, X — общее количество жителей страны X.

Нам известно, что X = 15U и что T = 0,7X. Отсюда находим, что T = 10,5U.

Вася рассчитывал не уровень безработицы — уровень безработицы в действительности рассчитывается не как $\frac{T-E}{X}$, а как $\frac{U}{U+E}$. Однако, раз ответ Васи был засчитан как верный, для страны X величины этих дробей по случайности совпали, что дает нам еще одно условие:

$$\frac{T-E}{X}=\frac{U}{U+E}$$

Преобразуя, получаем квадратное уравнение относительно E:

$$E^2-E(T-U)+U(X-T)=0$$

Разделим обе части на U^2:

$$\left(\frac{E}{U}\right)^2-\frac{E}{U}\left(\frac{T}{U}-1\right)+\left(\frac{X}{U}-\frac{T}{U}\right)=0$$

Обозначив $\frac{E}{U}=e$ и подставив в уравнение известные величины $\frac{X}{U}=15$, $\frac{T}{U}=10{,}5$, получаем окончательное уравнение:

$$e^2-9{,}5e+4{,}5=0$$

Это уравнение имеет два корня: $e=9$ и $e=0{,}5$.

Если $e=0{,}5$, то $\frac{E}{X}=\frac{1}{30}$, что противоречит условию о том, что в стране работает больше половины населения.

Если $e=9$, $\frac{E}{X}=\frac{3}{5}$, что согласуется с условием. $\frac{E}{U}=9$, и значит, уровень безработицы равен 10%.

Ответ (Васи): 10%.

Задача 4 (25 баллов)

Небольшая фирма «Перетягивание каната» является единственным в городе производителем спортивного инвентаря. Спрос на продукцию фирмы описывается уравнением $Q_d = 240 - 2P$, а функция общих издержек имеет вид $TC = 40Q + 500$.

Политика государства в отношении данной фирмы является, как это часто бывает, неоднозначной. Одно из ведомств («ГлавБюджетПополнение») обязало фирму уплачивать процентный налог на выручку (в виде доли от цены потребителя). «Центр поддержки малого предпринимательства», напротив, предоставил фирме субсидию (в виде фиксированной суммы за каждую произведенную единицу продукции).
Ведомства принимали решение о ставках налога и субсидии не сговариваясь, но по иронии судьбы вышло так, что в итоге сумма уплаченного фирмой налога в точности совпала с суммой полученной фирмой субсидии.

(а) Каковы были ставки введенных налога и субсидии, если известно, что после их введения фирма увеличила выпуск на 25 % по сравнению с первоначальным?

(б) Покажите, что прибыль фирмы уменьшилась по сравнению с первоначальной ситуацией, несмотря на то, что сумма, полученная фирмой от государства, равна сумме, которую фирма выплатила государству. Объясните, как такое могло получиться.

(в) Один эксперт, комментируя забавную ситуацию, в которую попала фирма, заметил:
«То, что прибыль фирмы уменьшилась, абсолютно неудивительно: ведь какими бы ни были функция спроса на продукцию фирмы и функция ее издержек, прибыль фирмы не могла увеличиться, если в результате вмешательства расходы государства на субсидию и поступления от налога оказались равны».
Прав ли данный эксперт? Если вы считаете, что он прав, докажите его утверждение. Если вы считаете, что эксперт ошибается, приведите примеры функций спроса и издержек, при которых описанное в задаче «сбалансированное» вмешательство государства обернется ростом прибыли фирмы.

Решение:

(а) Пусть введенная ставка налога равна t, а ставка субсидии равна s.
Тогда после одновременного введения налога и субсидии задача фирмы примет вид

$$\pi(Q) = (1-t)(120-0,5Q)Q - 40Q - 500 + sQ \to \max$$

$$\pi(Q) = \left[(1-t)120 + s - 40\right]Q - 0,5(1-t)Q^2 - 500 \to \max$$

Таким образом, функция прибыли фирмы является параболой с ветвями вниз. Фирма выберет объем, соответствующий вершине этой параболы:

$$Q^* = \frac{(1-t)120 - 40 + s}{2\cdot 0,5(1-t)} = 120 + \frac{s-40}{1-t}$$

(тот же самый результат можно было получить, приравнивая предельный доход к предельным издержкам).
Ситуация до введения налога и субсидии соответствовала случаю $t=0$, $s=0$, и значит, первоначальный выпуск фирмы равен $120-40=80$.
По условию, выпуск вырос на 25%, и значит, новый объем равен 100.
Получаем уравнение $120 + \dfrac{s-40}{1-t} = 100$.
Второе уравнение на t и s получим из условия о равенстве выплат и поступлений:
$tPQ = sQ$, откуда $s = tP = t(120 - 0,5\cdot 100) = 70t$

В итоге получаем систему

$$\begin{cases} 120+\dfrac{s-40}{1-t}=100; \\ s=70t. \end{cases}$$

Решая ее, получаем $t=0,4=40\%$, $s=28$ ден. ед. Сумма поступлений от налога (она же сумма выплат по субсидии) равна $28\cdot 100=2800$.
(б) Первоначальная прибыль равна $80\cdot 80-40\cdot 80-500=2700$.
Новая прибыль равна $70\cdot 100-40\cdot 100-500-2800+2800=2500$.
Таким образом, прибыль фирмы уменьшилась на 200.
Как такое могло получиться?
Дело в том, что отличие новой ситуации от старой состоит не только в том, что фирма выплачивает некую сумму и получает некую сумму. Главное заключается в том, политика государства создает для фирмы стимулы изменить выпуск, а значит, значение прибыли, которую получает фирма еще до фактического осуществления расчетов с бюджетом, также меняется. Потери в 200 единиц возникают именно из-за этого.

(в) Утверждение эксперта верно. Докажем его.

Доказательство:

Решение 1:

Назовем ситуацию до вмешательства государства «старой», а ситуацию после вмешательства — «новой».
Заметим, что в даже старой ситуации фирма всегда может обеспечить себе «новый» уровень прибыли. Для этого ей просто-напросто надо произвести «новый» объем выпуска, а затем, имитировав действия государства, заплатить самой себе ту сумму, которую в новой ситуации она платит государству и получает от него. Или, что то же самое, ей надо произвести «новый» объем выпуска, а затем ничего не делать.
Однако если при этом «новая» прибыль оказалась бы больше, чем «старая», то фирма явно не выбрала бы «старый» объем производства (раз существует вариант лучше). Тем не менее, наша рационально действующая фирма, максимизируя прибыль, выбрала, как мы знаем, именно «старый» объем! Значит, «новая» прибыль не может быть больше, чем «старая».

Решение 2:

Пусть функция прибыли фирмы до вмешательства описывается уравнением $\pi=f(Q)$.
Заметим, что прибыль фирмы после вмешательства просто равна значению f в точке нового объема выпуска (ведь все потоки денег, не учтенные в f, взаимно компенсировались).
С другой стороны, прибыль фирмы до вмешательства равна максимальному значению f.
Получаем, что «старая» прибыль равна значению f в точке максимума этой функции, а «новая» прибыль — значению f в точке нового выпуска. Значит, новая прибыль заведомо не больше, чем старая.

Комментарий:
Таким образом, «перетягивание каната» между налогом и субсидией будет всегда приводить в некотором смысле к «победе» налога: прибыль фирмы будет сокращаться, несмотря на формальное равенство сумм, которые фирма получает и выплачивает.

Задача 10 (25 баллов)

Компания «Progressive stools[1]» владеет тремя заводами по производству современных инновационных табуреток. Для каждого из заводов в таблице приведена зависимость месячных издержек от количества произведенных на нем за этот месяц табуреток:

Номер завода	Функция затрат
1	$TC_1(q_1) = 3q_1^2 - q_1 + 1432$
2	$TC_2(q_2) = 3q_2^2 + q_2 + 456$
3	$TC_3(q_3) = 3q_3^2 + 3q_3 + 123$

Даже если на каком-то заводе ничего не производится, фирма несет фиксированные издержки, связанные с этим заводом.

Выведите «общую» для фирмы функцию $TC(Q)$, которая показывает минимально возможные издержки фирмы на производство в общей сложности Q единиц продукции в месяц. При этом имейте в виду, что количество даже самых инновационных табуреток может выражаться только целым числом.

Решение:

Найдем функции предельных издержек на каждом из заводов (поскольку в данном случае выпуск может быть выражен только целым числом, то предельные издержки – это не производная TC, а просто приращение общих издержек при выпуске q-той табуретки).

$MC_1(q_1) = TC_1(q_1) - TC_1(q_1 - 1) = 3q_1^2 - q_1 + 1430 - (3(q_1 - 1)^2 - (q_1 - 1) + 1430) = 6q_1 - 4.$

$MC_2(q_2) = TC_2(q_2) - TC_2(q_2 - 1) = 6q_2 - 2$.

$MC_3(q_3) = TC_3(q_3) - TC_3(q_3 - 1) = 6q_3$.

Составим таблицу первых значений функций предельных издержек:

q	1	2	3	4	5	…	q
MC_1	2	8	14	20	26	…	$6q-4$
MC_2	4	10	16	22	28	…	$6q-2$
MC_3	6	12	18	24	30	…	$6q$

На каждом из заводов предельные издержки возрастают. Поэтому, минимизируя общие издержки, фирма будет производить каждую следующую табуретку там, где это обходится дешевле, то есть там, где предельные издержки ниже. Так, первую табуретку фирма произведет на первом заводе — это обойдется ей в 2; вторую табуретку фирма произведет на втором заводе (для этого завода она будет первой) — и потратит 4. Третью табуретку фирма произведет на третьем заводе, потратив 6, четвертую — вновь на первом и потратит 8, пятую — на втором, и.т.д. Таким образом, фирма будет «двигаться» по столбцам нашей таблицы сверху вниз, и итоговая шкала предельных издержек будет иметь вид

Q	1	2	3	4	5	6	7	8	…	Q
MC	2	4	6	8	10	12	14	16	…	$2Q$

[1] stool *(англ.)* — табуретка.

Как видим, функция предельных издержек фирмы является, в полном соответствии с названием компании, арифметической прогрессией. Функцию же общих издержек нетрудно найти как сумму этой прогрессии (не забудем прибавить все постоянные издержки, которые, независимо от выпуска, несет фирма на каждом из заводов):

$$TC(Q) = (2 + 4 + \ldots + 2Q) + 1432 + 123 + 456 = \frac{2(1+Q)\cdot Q}{2} + 2011 = Q^2 + Q + 2011.$$

Ответ: $TC(Q) = Q^2 + Q + 2011$.