Р Е Ш Е Н И Я З А Д А Ч

I тур

Математическая справка:

$$1 + x + x^2 + \ldots = \frac{1}{1-x} \text{ при } 0 \le x < 1;$$

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Задача 1 (20 баллов)

На рынке товара Z действуют 100 идентичных фирм; изначально рыночная функция спроса описывается уравнением $Q_d = 550 - P$, а рыночная функция предложения — уравнением $Q_s = 2P - 80$.

Производство данного товара сопровождается отрицательным внешним эффектом, и поэтому государство решило ввести на данном рынке корректирующий налог. Упор был сделан именно на сокращение выпуска, и налог ввели несколько необычный: так, при производстве q единиц продукции фирма должна была *за каждую* из них заплатить в бюджет $10q$ ден. ед.

Определите, на сколько в результате действий государства сократился объем производства товара Z, а также сумму налоговых сборов, полученную государством.

Решение:

С задачей справится тот, кто сможет понять, как изменится функция прибыли каждой фирмы и как, соответственно, изменится функция предложения фирм.

Первоначальное равновесие: $550 - P = -80 + 2P \Rightarrow P = 210,\ Q = 340.$

Найдем обратную функцию предложения типичной фирмы.
$Q_s = -80 + 2P \Rightarrow q_s = -0,8 + 0,02P \Rightarrow P = 50q + 40$.

Как известно, в каждой точке кривой предложения $P = MC$, поэтому функция предельных издержек каждой фирмы имела вид $MC = 50q + 40$, и значит, функция переменных издержек имела вид $VC = 25q^2 + 40q$.

С введением налога функция переменных издержек приняла вид $VC = 25q^2 + 40q + 10q \cdot q = 35q^2 + 40q$.

Значит, $MC_{new} = 70q + 40 = P$, откуда $q_s = \dfrac{P-40}{70}$.

Новая функция рыночного предложения стала иметь вид

$$Q_s^{new} = 100q_s = \frac{10P}{7} - \frac{400}{7}.$$

$Q_d = Q_s^{new} \Rightarrow 550 - P = 10P/7 - 400/7 \Rightarrow P = 250,\ Q = 300.$

Следовательно, выпускаемое количество «вредного» товара снизилось на 40 единиц.

Каждая фирма выпустила 3 единицы продукции и заплатила $10 \cdot 3 \cdot 3 = 90$ в бюджет. Общая сумма сборов составила $90 \cdot 100 = 9000$.

Ответ: выпуск снизился на 40 единиц; сумма сборов составила 9000 ден. ед.

Задача 2 (10 баллов)

За два года (2008-й и 2009-й) покупательная способность денег выросла на 10 %. В начале 2010 года, предполагая, что в нем уровень инфляции будет таким же, как в 2009-м, коммерческий банк выдает кредит сроком на один год с расчетом получить реально 10 % годовых. Определите:

(а) номинальную ставку процента (***i***), по которой был выдан кредит, если известно, что в 2008 г. покупательная способность денег выросла на 25 %;

(б) реальную процентную ставку (***r***), которую фактически получил данный банк, если при возвращении кредита стало ясно, что деньги за год потеряли пятую часть своей покупательной способности.

Решение:

(а) Обозначим I_t индекс роста цен в году t. То есть $I_t = 1 + \pi_t$, где π_t — темп инфляции в году t. Тогда индекс роста покупательной способности в году t равен $\frac{1}{I_t}$.

«За два года (2008 и 2009) покупательная способность денег выросла на 10%»:

$$\frac{1}{I_{08}} \frac{1}{I_{09}} = 1{,}1$$

«В начале 2010 года, предполагая, что в текущем году уровень инфляции будет таким же, как в предыдущем, коммерческий банк выдает кредит сроком на один год с расчетом получить реально 10% годовых»:

$$\frac{1+i}{I_{09}} = 1{,}1$$

«В 2008 г. покупательная способность денег выросла на 25%»:

$$\frac{1}{I_{08}} = 1{,}25$$

Из этих трех уравнений получаем:

$$1 + i = 1{,}1 I_{09} = \frac{1}{I_{08}} = 1{,}25$$

Таким образом, $i = 25\%$.

б) «При возвращении кредита стало ясно, что деньги за год потеряли пятую часть своей покупательной способности»:

$$\frac{1}{I_{10}} = \frac{4}{5}$$

Тогда $1 + r = \frac{1+i}{I_{10}} = 1{,}25 \cdot \frac{4}{5} = 1$

Таким образом, $r = 0$.

Ответ: (а) $i = 25\%$; (б) $r = 0$.

Задача 3 (20 баллов)

Производственная функция совершенно конкурентной фирмы «Минимум 100» имеет вид:

$$Q(K,L)=\begin{cases}0, \text{ если } KL<100;\\ \sqrt{KL}-10, \text{ если } KL\geq 100,\end{cases}$$

где Q — выпуск фирмы, K — объем используемого фирмой капитала, L — объем используемого фирмой труда.

В краткосрочном периоде количество капитала, используемого фирмой, фиксировано; фирма может менять объем выпуска только за счет изменения количества нанимаемого труда. Фирма закупает как труд, так и капитал на совершенно конкурентных рынках, причем известно, что зарплата равна 1.

Определите количество капитала, которым обладает фирма, если в интервью ее менеджер заявил, что в краткосрочном периоде фирма готова выпускать продукцию, только если рыночная цена этой продукции не опустится ниже 8.

Решение:

Выведем функцию переменных издержек фирмы. Переменными издержками являются расходы на закупку переменных факторов производства — в данном случае, расходы на оплату труда.

При нулевом выпуске переменные затраты фирмы будут равны нулю, так как в этом случае она сможет позволить себе вообще не нанимать работников.

Если же фирма захочет произвести некое $Q>0$, то ей придется начать нанимать работников. $Q=\sqrt{KL}-10$, и значит, требуемое значение L равно $\frac{(Q+10)^2}{K}$. Таким образом, при $Q>0$ переменные издержки фирмы составят $wL=1\cdot\frac{(Q+10)^2}{K}$. В итоге получаем, что функция переменных издержек фирмы имеет вид

$$VC(Q)=\begin{cases}\frac{(Q+10)^2}{K}, \text{ если } Q>0;\\ 0, \text{ если } Q=0.\end{cases}$$

Соответственно, функция средних переменных издержек фирмы имеет вид

$$AVC(Q)=\frac{1}{K}\left(Q+\frac{100}{Q}+20\right).$$

Минимум этой функции достигается в точке, где $AVC'(Q)=0$, то есть если $\frac{1}{K}\left(1-\frac{100}{Q^2}\right)=0$, откуда $Q=10$. Сам минимум AVC равен $AVC(10)=\frac{40}{K}$.

С другой стороны, по условию этот минимум равен 8 (так как $\min AVC$ — не что иное как минимальная рыночная цена, при которой фирма продолжит производство в краткосрочном периоде). Значит, $\frac{40}{K}=8$, откуда $K=5$.

Ответ: $K=5$.

Примечание:

Минимум средних переменных издержек можно в данном случае найти и без использования производной.
Используя неравенство о среднем геометрическом и среднем арифметическом, можно заметить, что $\frac{1}{2}\left(Q+\frac{100}{Q}\right)\geq\sqrt{Q\frac{100}{Q}}=10$, причем неравенство выполнено как равенство при $Q=\frac{100}{Q}$, то есть $Q=10$.

Отсюда сразу получаем, что $AVC(Q)\geq\frac{1}{K}\left(2\cdot10+20\right)=\frac{40}{K}$, причем при $Q=10$ неравенство выполнено как равенство. Значит, минимум средних переменных издержек действительно равен $\frac{40}{K}$.

Задача 4 (25 баллов)

В государстве Шахматная Федерация живут черные и белые. Белые тратят на потребление долю x своих дополнительных доходов, а черные — долю y. Государственные заказы размещаются поровну между двумя группами.

(а) Допустим, белые экономические агенты обращают свои расходы исключительно в доходы белых, а черные — исключительно в доходы черных. Найдите величину мультипликатора государственных закупок.

(б) Допустим, белые экономические агенты обращают свои расходы исключительно в доходы черных, а черные — исключительно в доходы белых. Найдите величину мультипликатора государственных закупок в этом случае.

(в) В каком из двух рассмотренных случаев значение мультипликатора государственных закупок больше? Зависит ли ваш ответ от конкретных значений предельных норм потребления двух групп?

Решение:

(а) В первом случае мы по сути имеем две изолированные области экономики, в каждой из которых процесс мультипликации идет так же, как и в стандартной модели. Поэтому если увеличить госзакупки на 1 единицу, то половинка пойдет к белым, и там она превратится в $\frac{0,5}{1-x}$ единиц ВВП, а половинка к черным, и там она превратится в $\frac{0,5}{1-y}$ единиц ВВП. Суммарный прирост выпуска при увеличении госзакупок на единицу составит $mult_G = \frac{1}{2(1-x)} + \frac{1}{2(1-y)}$.

(б) Здесь все интереснее — две области экономики становятся взаимосвязанными. Половинке единицы госзакупок, которая пошла к белым, будет суждено «прыгать» от белых к черным и обратно, и в итоге она превратится в прирост выпуска, равный

$$0,5(1+x+xy+x^2y+x^2y^2+x^3y^2+...) = 0,5(1+x+xy(1+x)+x^2y^2(1+x)+...) =$$

$$= 0,5(1+x)(1+xy+x^2y^2+...) = \frac{0,5(1+x)}{1-xy}.$$

Аналогично, половинка, которая пошла к черным, превратится в $\frac{0,5(1+y)}{1-xy}$.

Значит, необычный мультипликатор будет равен $mult_G = \frac{0,5(1+x)}{1-xy} + \frac{0,5(1+y)}{1-xy} = \frac{2+x+y}{2(1-xy)}$.

(в) Нам нужно сравнить величины $\frac{1}{2(1-x)} + \frac{1}{2(1-y)}$ vs. $\frac{2+x+y}{2(1-xy)}$, если x и y — положительные числа, меньшие единицы.

Удивительно, но между этими величинами неравенство всегда выполнено в одну и ту же сторону, независимо от конкретных значений норм потребления.

После домножения обеих сравниваемых величин на знаменатели и раскрытия скобок большинство слагаемых взаимно уничтожаются, и остается симпатичное сравнение

$$x^2 + y^2 \text{ vs. } 2xy$$

$$(x-y)^2 \geq 0$$

Таким образом, левая часть всегда не меньше правой, а значит в пункте (а) мультипликатор госзакупок всегда будет не меньше, чем в пункте (б). Равенство же достигается, как видим, только при $(x-y)^2=0$, то есть при $x=y$, что понятно — если нормы потребления одинаковы, то с точки зрения процесса мультипликации две группы идентичны, и поэтому в пунктах (а) и (б) результаты должны быть одинаковы.

Ответ:

(а) $mult_G=\dfrac{1}{2(1-x)}+\dfrac{1}{2(1-y)}$;

(б) $mult_G=\dfrac{2+x+y}{2(1-xy)}$;

(в) при любых значениях предельных норм потребления мультипликатор в пункте (а) не меньше, чем мультипликатор в пункте (б).

Задача 5 (25 баллов)

В мире выпускается два продукта: хлеб и масло. Люди потребляют их только в виде бутербродов. Для изготовления одного бутерброда на кусок хлеба массой в 50 грамм намазывается масло массой 10 грамм.

Залесье — маленькая страна, которая может произвести не более 14 кг масла. Кривая производственных возможностей Залесья в производстве хлеба и масла имеет кусочно-линейный вид; точки излома соответствуют производству 1 кг масла, 2 кг масла, 3 кг масла, …, 13 кг масла.

При этом альтернативные издержки производства первого килограмма масла в Залесье составляют 1 кг хлеба, второго — 2 кг хлеба, третьего — 3 кг хлеба и т.д. Если залесцы произведут 14 кг масла, то хлеба они не смогут произвести нисколько.

Сначала Залесье жило совершенно изолированно, а потом решило торговать с миром. Известно, что мировая цена на масло составляет 5 кг хлеба за 1 кг масла. Залесье так мало, что его производство и потребление не может повлиять на мировую цену.

(а) Сколько бутербродов потребляли жители Залесья, когда страна жила изолированно?

(б) На сколько больше бутербродов они смогли съедать после того, как началась торговля?

(в) Маслоделы Залесья обратились с петицией к правительству с просьбой установить пошлину на ввоз импортного масла в размере 2 кг хлеба за 1 кг ввезенного масла с целью способствования развитию маслодельной промышленности страны. Как повлияет реализация этой идеи на число доступных залесцам бутербродов? (Считаем, что хлеб, поступивший в казну в качестве доходов от пошлины, для производства бутербродов не используется).

Решение:

(а) Чтобы не тратить напрасно ресурсы, залесцам нужно произвести такое количество хлеба, которое соотносилось бы с количеством масла как 50:10. Таким образом, нам нужно найти точку пересечения луча, на котором хлеба производится в 5 раз больше, чем масла, и КПВ.

Этот луч может пересечь КПВ как в точке, где количество масла выражено целым числом (точке излома КПВ), так и в точке, где количество масла выражено нецелым числом.

Пусть Залесье производит целое x кг масла. Тогда оно сможет произвести еще $(1+2+\ldots+14)-(1+2+\ldots+x)=\frac{14\cdot 15}{2}-\frac{x(x+1)}{2}$ кг хлеба. Таким образом, все точки излома КПВ лежат на параболе $y=105-\frac{x(x+1)}{2}$. Попробуем найти точку пересечения этой параболы и луча $y=5x$:

$$105-\frac{x(x+1)}{2}=5x.$$

$$x^2+11x-210=0.$$

Единственный положительный корень легко угадать: x = 10. Этот корень целый, и поэтому наш луч действительно пересечет КПВ в точке излома. Значит, Залесье произведет 10 кг масла и 50 кг хлеба, чего достаточно для изготовления 10/0,01 = 1000 бутербродов.

(б) В случае открытия торговли масло будет выгодно производить до тех пор, пока альтернативные издержки не больше мировой цены. В данном случае выгодно производить лишь 5 кг масла. При этом может быть произведено $\frac{14\cdot 15}{2}-\frac{5(5+1)}{2}=90$ кг хлеба. Часть хлеба нужно обменять на масло, чтобы достигнуть отношения запаса хлеба к маслу 50:10. Пусть y — количество масла, которое импортирует Залесье. Выпишем отношение запаса хлеба к запасу масла с учетом торговли и приравняем к 5: $\frac{90-5y}{5+y}=5.$ Отсюда y = 6,5. В результате импорта 6,5 кг масла в распоряжении залесцев окажутся 5+6,5 = 11,5 кг масла и 90-6,5*5 = 57,5 кг хлеба. Этого достаточно для производства 11,5/ 0,01 = 1150 бутербродов, что на 1150 — 1000 = 150 бутербродов больше, чем до начала торговли.

(в) Реализация идеи уменьшит число доступных бутербродов. В самом деле, при наличии пошлин внутренняя цена на масло будет на 2 кг хлеба выше мировой, то есть составит 7 кг хлеба за кг масла. В этом случае залесцы найдут выгодным произвести 7 кг масла, а оставшихся ресурсов окажется достаточно для выпуска $\frac{14\cdot 15}{2}-\frac{7(7+1)}{2}=77$ кг хлеба. В результате торговли будет куплено y кг масла, где y удовлетворяет уравнению $\frac{77-7y}{7+y}=5$ Отсюда находим, что $y=3,5$. Отечественного и импортного масла будет достаточно, чтобы произвести $(7+3,5)/0,01=1050$ бутербродов, что на 100 бутербродов меньше, чем до введения пошлины.

Примечание: в решениях пунктов (б) и (в) предполагается, что при издержках производства внутри страны, равных мировой цене, масло производится внутри страны. С тем же основанием можно считать, что предельный килограмм масла импортируется. Это не влияет на число доступных бутербродов.

Ответ:
(а) 1000 бутербродов;
(б) на 150 бутербродов;
(в) количество доступных бутербродов снизится на 100.