# 11 класс

## 1 ТРАССЫ ИСКУССТВЕННЫХ СПУТНИКОВ

Е.Н. Фадеев

**? Вам предоставлены два рисунка, на которых изображены трассы искусственных спутников Земли (траектории точки на поверхности Земли, где спутник виден в зените, стр. 42) в равноугольной проекции. Орбиты спутников круговые. Определите периоды обращения спутников и наклонение их орбит к плоскости экватора Земли.**

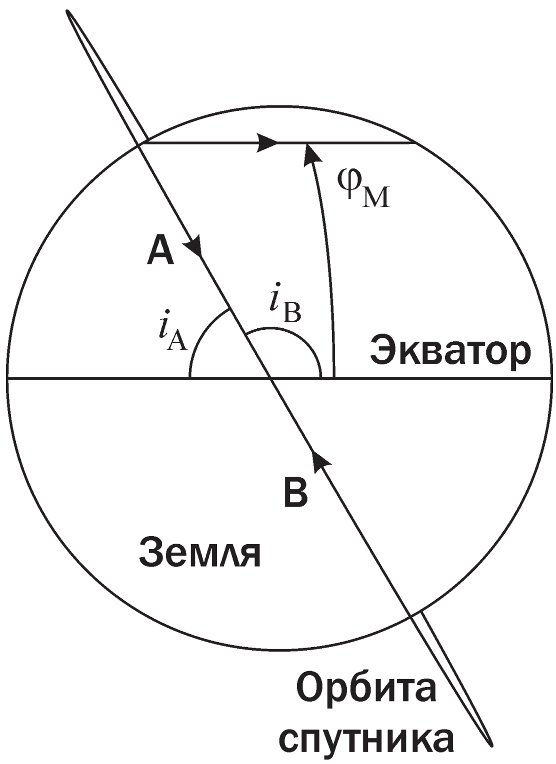
**!** В начале решения рассмотрим вопрос о наклонении орбит спутников. Изобразим Землю и орбиту спутника в проекции, перпендикулярной плоскости орбиты спутника и плоскости экватора.

Если спутник движется по своей орбите с запада на восток, в ту же сторону, что и Земля вокруг своей оси (направление **А** на рисунке), то величина наклонения орбиты $i_A$ равна углу между плоскостями экватора и орбиты спутника. Тогда, как видно на рисунке, для наклонения справедливо простое соотношение

$$i_A = \varphi_M,$$

где $\varphi_M$ – наибольшая широта места, в котором спутник можно наблюдать в зените. Если же спутник движется в противоположную сторону (направление **В** на рисунке), то наклонение его орбиты считается равным

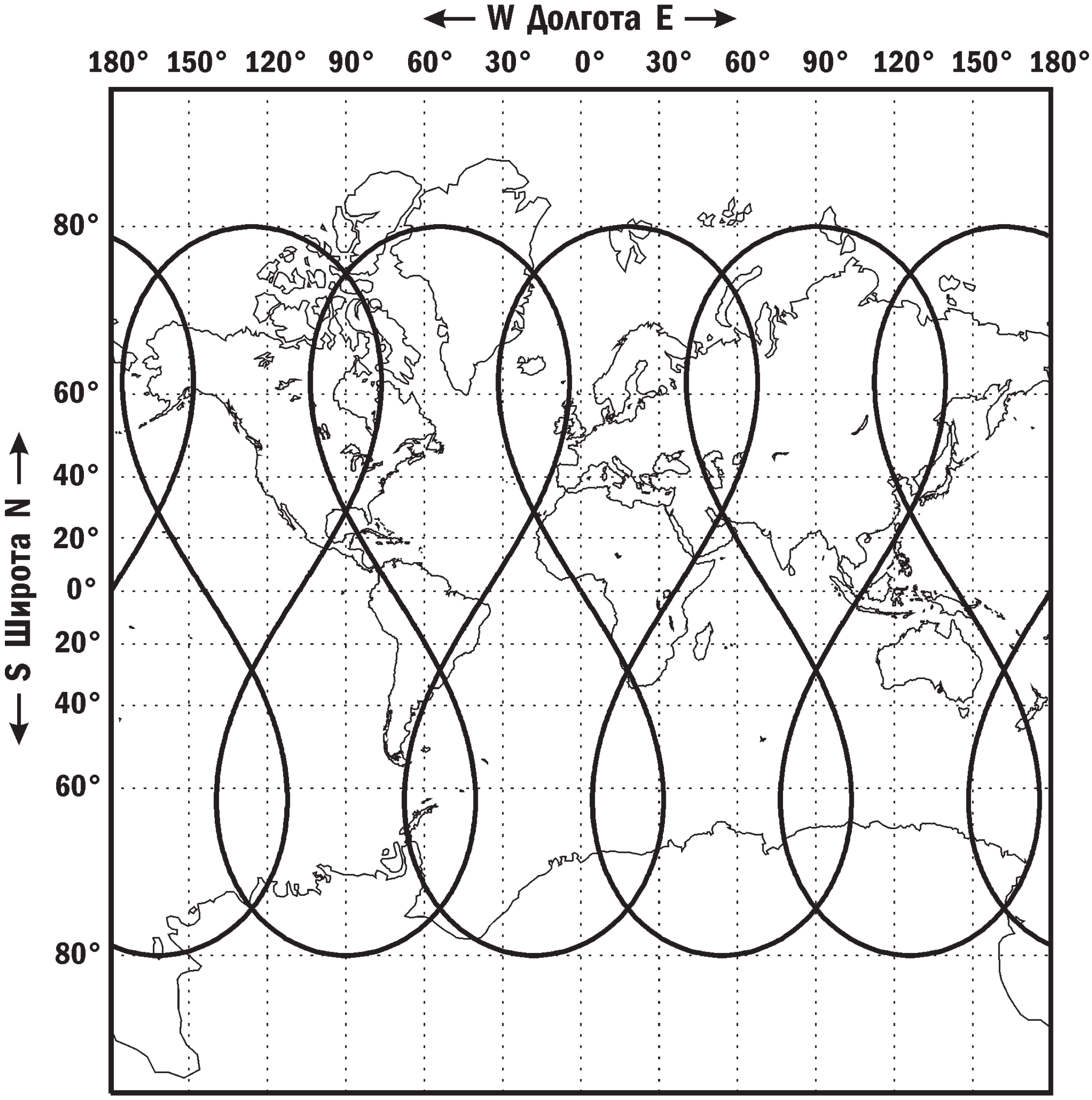
$$i_B = 180° - \varphi_M.$$



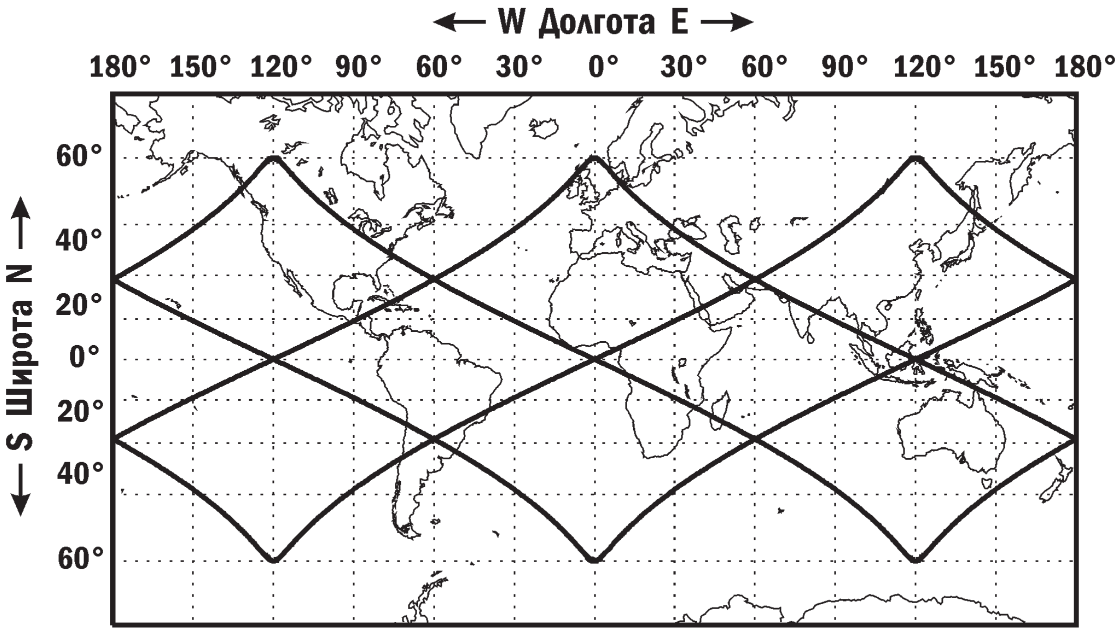

Поэтому мы можем сразу сказать, что наклонение орбиты первого спутника в условии задачи равно 80° или 100°, а наклонение орбиты второго спутника – 60° или 120°. Чтобы выбрать правильные значения, нам нужно установить направление вращения обоих спутников.

Форма трассы спутника определяется наложением орбитального движения спутника и осевого вращения Земли. Если бы Земля не вращалась вокруг своей оси, то спутник, совершив один оборот, возвращался бы в ту же точку орбиты над той же самой точкой на поверхности Земли. Трасса спутника представляла бы собой замкнутую кривую, похожую на синусоиду, один период которой соответство-

## Трасса 1




## Трасса 2



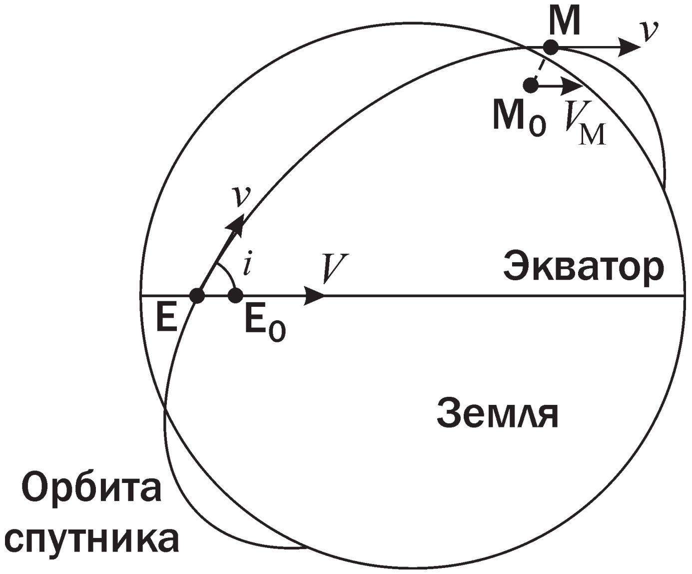
вал бы всей окружности Земли. В реальности картина существенно сложней. По завершению одного периода спутник возвращается в ту же точку орбиты, но Земля поворачивается вокруг своей оси, и под спутником оказывается уже другая точка поверхности, хотя и с той же широтой. Угол поворота Земли (и разность долгот) зависит от орбитального периода спутника. К примеру, для низкой орбиты с периодом 1.5 часа угол поворота Земли составит около 22.5°. В итоге, синусоидальная трасса спутника сожмется или растянется, в зависимости от соотношения направлений вращения спутника и Земли.

Рассмотрим вначале случай обратного вращения спутника (направление **B** на рисунке, наклонение орбиты более 90°). В этом случае движение спутника будет происходить с востока на запад, а движение поверхности Земли – с запада на восток. В итоге, трасса спутника во всех точках его орбиты будет сохранять западное направление по долготе. Долгота точки Земли, находящейся под спутником, будет постоянно уменьшаться.

Полученный вывод вступает в противоречие с тем, что мы видим на трассе первого спутника. На ней присутствуют характерные «петли» – долгота точки Земли под спутником то увеличивается, то уменьшается. Следовательно, первый спутник не может иметь обратного направления вращения. Он обращается в ту же сторону, что и Земля вокруг своей оси, а наклонение его орбиты составляет 80°.

Чтобы определить период обращения этого спутника, нужно выяснить, в каком направлении движется точка Земли под спутником вдоль трассы. Как уже было указано, эта точка в разных участках трассы смещается по долготе как к западу, так и к востоку. Рассмотрим движение спутника по орбите в момент пересечения плоскости экватора (точка **E** на рисунке) и на наибольшем удалении от нее (точка **M** на рисунке). Обозначим через $\mathbf{E_0}$ и $\mathbf{M_0}$ точки поверхности Земли, находящиеся в этот момент под спутником. За счет осевого вращения Земли эти точки движутся на восток со скоростями $V$ и $V_\mathrm{M}$, причем

$$V_\mathrm{M} = V \cos \varphi_\mathrm{M}.$$




По условию задачи, орбита спутника круговая. Пусть его скорость равна $v$. Если бы Земля не вращалась вокруг своей оси, точка поверхности Земли под спутником двигалась бы вдоль трассы со скоростью $v \cdot (R/r)$, где $R$ и $r$ – радиусы Земли и орбиты спутника. Учтем осевое вращение Земли и определим компоненту скорости движения точки по трассе в направлении, параллельном экватору (по долготе):

$$u_{\mathrm{E}} = v \cdot (R/r) \cos i - V,$$

$$u_{\mathrm{M}} = v \cdot (R/r) - V \cos \varphi_{\mathrm{M}} = v \cdot (R/r) - V \cos i.$$

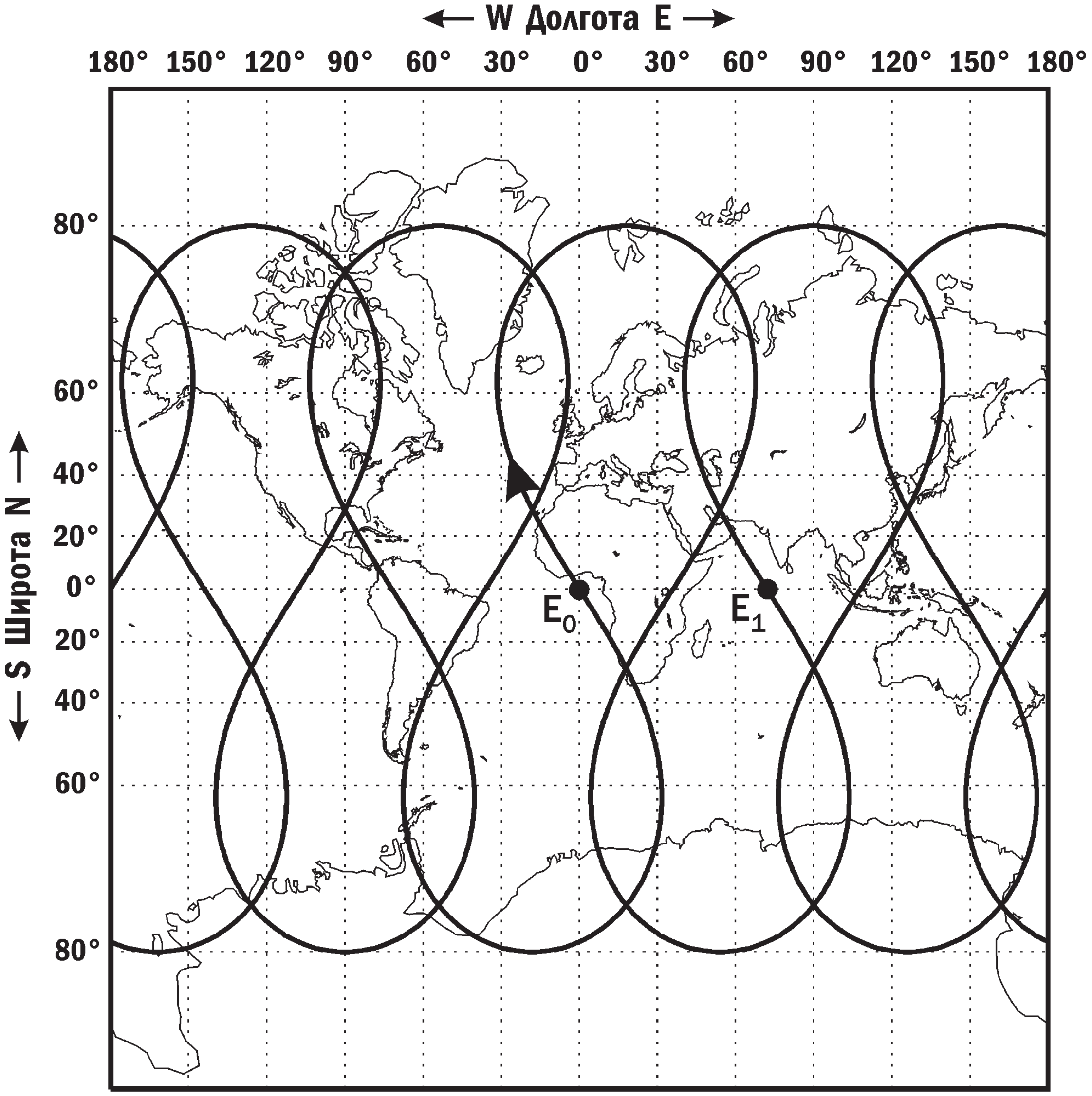
Данные величины имеют знак «+», если движение происходит к востоку, и знак «–», если движение происходит к западу. Угол $i$ положителен и не превосходит 90°. Мы видим, что величина $u_{\mathrm{E}}$ всегда меньше, чем $u_{\mathrm{M}}$. В частности, при определенном соотношении скоростей скорость $u_{\mathrm{E}}$ может быть отрицательной, а скорость $u_{\mathrm{M}}$ – положительной (обратная картина невозможна). Итак, изменение направления скорости указывает, что первый спутник в условии задачи движется на запад при пересечении плоскости экватора и на восток – при максимальном удалении от него. Это позволяет нам указать направление движения точки под спутником по трассе (стрелка на рисунке).

Пусть в начальный момент времени спутник пересек плоскость экватора, находясь при этом над точкой $\mathbf{E_0}$ с координатами 0° ш., 0° д. Сделав один оборот, по одному разу пролетев над северным и южным полушариями Земли, спутник оказался над точкой $\mathbf{E_1}$ с координатами 0° ш., 72° в.д. Как видно из трассы, данная точка удалена от точки $\mathbf{E_0}$ к востоку (по направлению движения спутника и Земли) на 1/5 часть окружности экватора. При этом трасса не замыкала круг долгот, оставаясь вблизи указанного долготного диапазона. Следовательно, за один орбитальный период Земля отстала в своем вращении от спутника на 1/5 оборота, и период обращения спутника составляет 4/5 звездных суток, то есть 19ч09м.

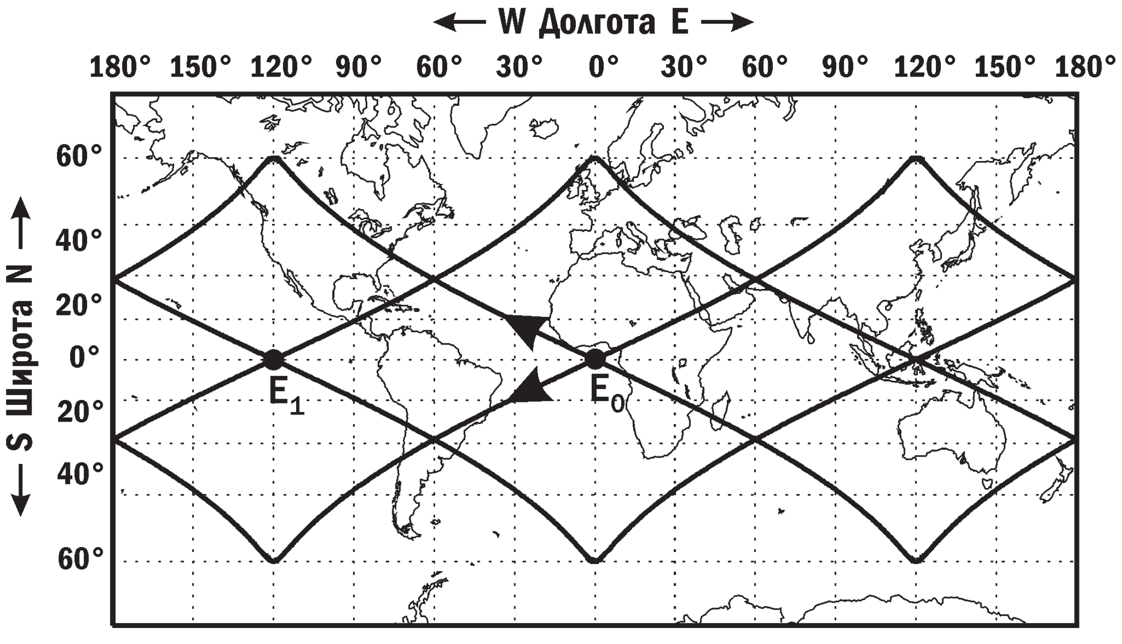
Обратимся к трассе второго спутника. Здесь точка, расположенная под спутником, движется по долготе строго в одном направлении. Однако, при достижении максимальной широты $\varphi_{\mathrm{M}}$ на трассе наблюдается характерный «излом». С учетом круговой орбиты спутника это означает, что скорость $u_{\mathrm{M}}$ (см. формулы выше) в этот момент приближается к нулю. Это, в свою очередь, может иметь место, если скорости $v$ и $V$ направлены в одну сторону, и данный спутник также обладает прямым направлением вращения. Наклонение его орбиты равно 60°.

Исходя из тех же формул, скорость $u_{\mathrm{E}}$ у этого спутника отрицательна, и при пересечении экватора он (как и первый спутник) будет двигаться к западу. При этом возможны две траектории, указанные на рисунке стрелками. В обоих случаях в течение одного орбитального периода точка трассы пройдет целый круг в 360° по долготе и сместится еще на 120° к западу. При этом сам спутник движется по орбите с запада на восток. Следовательно, в ходе своего орбитального периода он отстанет от Земли на 4/3 оборота, и величина самого периода равна 7/3 звездных суток или 2д07ч51м.

## Трасса 1



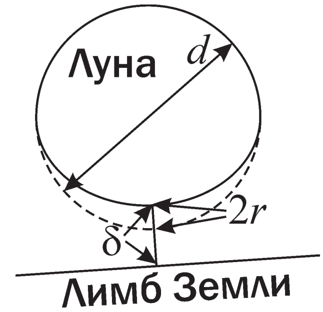

## Трасса 2



# III 2 ОРБИТАЛЬНОЕ ФОТО ЛУНЫ

О.С. Угольников

**? На фотографии, сделанной с искусственного спутника Земли (3 стр. обложки), вы видите полную Луну над краем Земли, помеченным красной линией. Оцените, на какой высоте над поверхностью Земли находится искусственной спутник в момент съемки. Принять величину атмосферной рефракции на поверхности Земли у горизонта равной 35′. Считать, что на всех высотах атмосфера имеет одинаковый химический состав и температуру 0°C. Поглощение и рассеяние света в атмосфере, а также эффекты облачности не учитывать.**




! Изображение Луны на фотографии искажено эффектом преломления света в атмосфере Земли. Этот эффект мы можем наблюдать и на Земле, особенно хорошо он заметен на восходе и заходе Солнца и Луны. Но картина, наблюдающаяся на данной фотографии, отличается от земных восходов и заходов Луны.

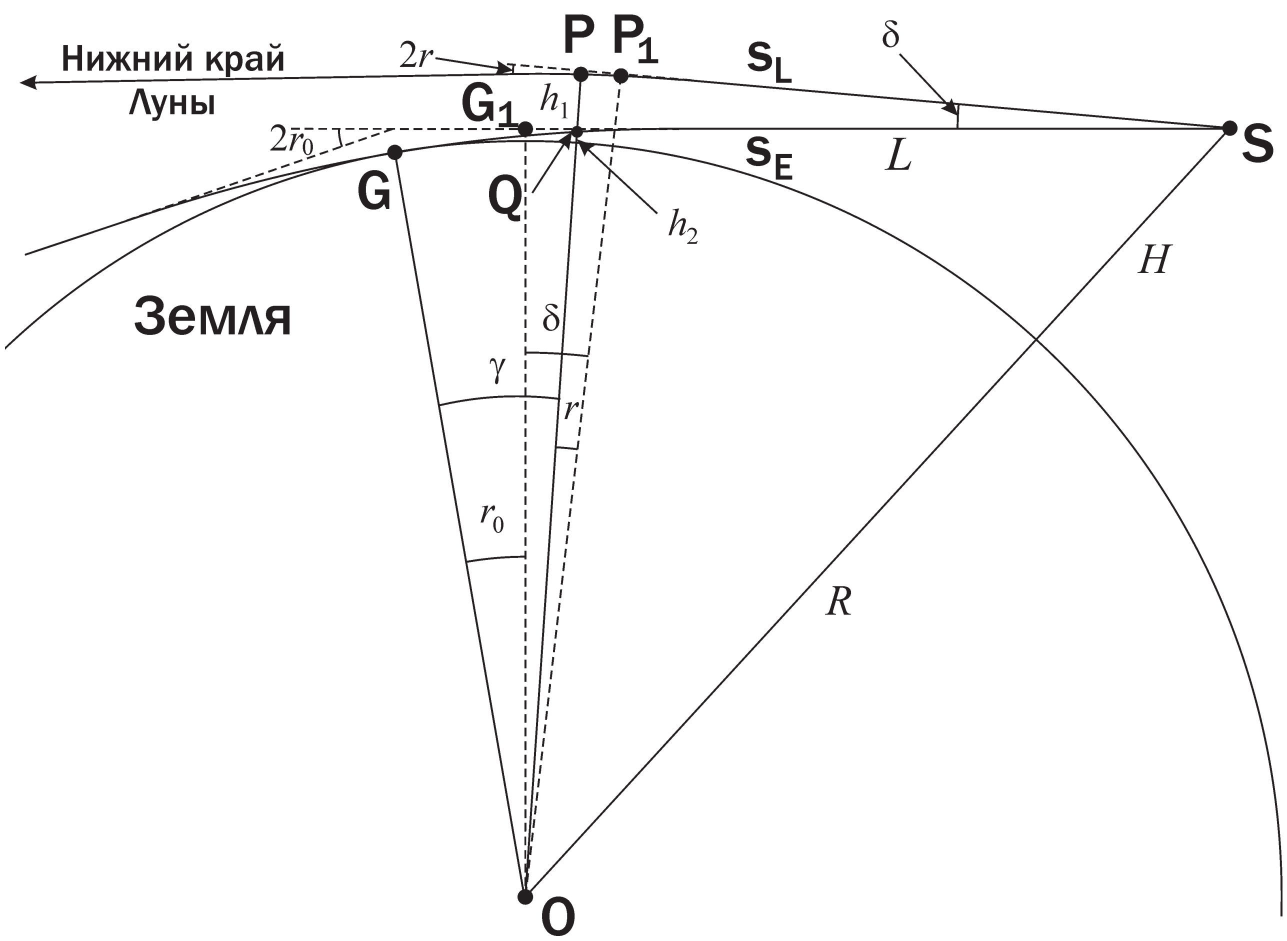
Мы видим, что верхняя половина лунного диска не искажена рефракцией – ее излучение прошло над плотными слоями атмосферы. В то же время нижний край Луны заметно приподнят над краем (лимбом) Земли. Сравнив вид Луны с неискаженным кругом, мы можем определить величину углового смещения нижнего края Луны. По фотографии оно составляет около 1/9 от углового диаметра Луны, то есть 3.5′. Для дальнейшего удобства обозначим эту величину $2r$. Это есть угол преломления луча от нижнего края Луны в атмосфере Земли. Нам необходимо вычислить, на какой наименьшей высоте (высоте перигея) в атмосфере прошел этот луч.

Если бы излучение прошло по касательной к поверхности Земли (например, в точке **G** на рисунке справа) и дальше вышло за пределы атмосферы, то угол его преломления составил бы $2r_0$ или 70′ ($r_0$ – величина приземной рефракции у горизонта). Множитель 2 появляется вследствие того, что луч не только входит в атмосферу, но и выходит из нее.

Предположим, что луч прошел точку перигея **P** на высоте $h$ над поверхностью Земли. По условию задачи, атмосфера имеет постоянный химический состав и температуру $T$ (273 K). Тогда концентрация молекул изменяется с высотой по закону Больцмана:

$$n(h') = n_0 e^{-\frac{\mu g h'}{\Re T}} = n_0 e^{-\frac{h'}{h_0}}.$$

Здесь $\mu$ – молярная масса атмосферного воздуха, $g$ – ускорение свободного падения, $\Re$ – универсальная газовая постоянная. Величина $h_0$ (называемая высотой однородного столба атмосферы) равна 8.0 км. Концентрация частиц на нулевом уровне обозначена как $n_0$. Если подняться на высоту $h$ и принять данный слой атмосферы за нулевой уровень, то для вышележащих слоев будет выполняться та же формула, только с другой константой $n_0$, умноженной на $e^{-h/h_0}$. Распространение




луча с высотой перигея $h$ аналогично распространению луча, касающегося поверхности Земли при плотности атмосферы, умноженной на фактор $e^{-h/h_0}$. Преломляющие свойства в атмосфере пропорциональны концентрации частиц. В итоге, угол поворота данного луча после выхода из атмосферы составит

$$2r(h) = 2r_0 e^{-\frac{h}{h_0}}.$$

Отсюда мы получаем высоту перигея луча, идущего от нижнего края Луны к искусственному спутнику Земли:

$$h = h_0 \ln \frac{r_0}{r}.$$

Учитывая определение величины $r$ как половины угла преломления луча от нижнего края Луны, получаем значение высоты точки **P**: 24 км.

Изобразим геометрию распространения лучей от Луны и Земли к спутнику на рисунке. Пусть спутник располагается в точке **S**. Свет от краев Луны и Земли приходит в эту точку по полупрямым $s_L$ и $s_E$. Угловое расстояние между лимбом Земли и искаженным краем диска Луны (угол между полупрямыми) обозначим как $\delta$. Его также можно определить по фотографии, оно составляет $8.5'$.

Как видно из рисунка, найденная выше высота точки **P** есть сумма величин $h_1$ и $h_2$. Для первой из этих величин, видимой со спутника высоты точки **P** или длины отрезка **PQ**, справедливо соотношение

$$h_1 = L \cdot \delta,$$

где $L$ – расстояние от спутника до лимба Земли. В этой формуле учтена малость угла $\delta$ и угла преломления лучей. Второе слагаемое – высота точки **Q**, $h_2$, появляется вследствие того, что изображение лимба Земли также искажено атмосферной рефракцией – фактически мы видим на лимбе точку **G**. Покажем, что величина $h_2$ мала и фактически не влияет на ответ задания. Соединим центр Земли (точку **O**) прямыми линиями с точками перигея двух лучей (**G** и **P**, сплошные линии), а также проведем из точки **O** перпендикуляры на полупрямые $\boldsymbol{s}_{\mathbf{E}}$ и $\boldsymbol{s}_{\mathbf{L}}$ (пунктирные линии). Эти перпендикуляры пересекаются с полупрямыми в точках $\mathbf{G_1}$ и $\mathbf{P_1}$. По свойству углов со взаимно-перпендикулярными сторонами угол $\mathbf{P_1OG_1}$ равен $\delta$. Так как лучи симметричны относительно прямых **OP** и **OG**, то углы $\mathbf{POP_1}$ и $\mathbf{GOG_1}$ равны половинам соответствующих углов преломления, то есть равны $r$ и $r_0$. Из этого следует соотношение углов:

$$\gamma = \mathbf{POG} = \mathbf{P_1OG_1} - \mathbf{P_1OP} + \mathbf{G_1OG} = \delta + r_0 - r = 42'.$$

Траектория луча от точки **G** до точки **Q** – изогнутая линия, что несколько уменьшает высоту $h_2$. Для того, чтобы оценить величину $h_2$ сверху, представим, что траектория луча – прямая линия. Тогда треугольник **QOG** – прямоугольный, в котором нам известен угол $\gamma$. Верхний предел на высоту точки **Q** равен:

$$h_2 = \frac{R}{\cos\gamma} - R \approx \frac{R\gamma^2}{2}$$

или примерно 0.5 км. Здесь $R$ – радиус Земли, а угол $\gamma$ берется в радианной мере. Мы видим, что высота $h_2$ существенно меньше высоты $h$, и далее мы можем пользоваться простым соотношением:

$$h = h_1 = L \cdot \delta.$$

Из этого мы получаем значение $L$:

$$L = \frac{h}{\delta} = \frac{h_0 \ln(r_0/r)}{\delta} \approx 10000\,\text{км},$$

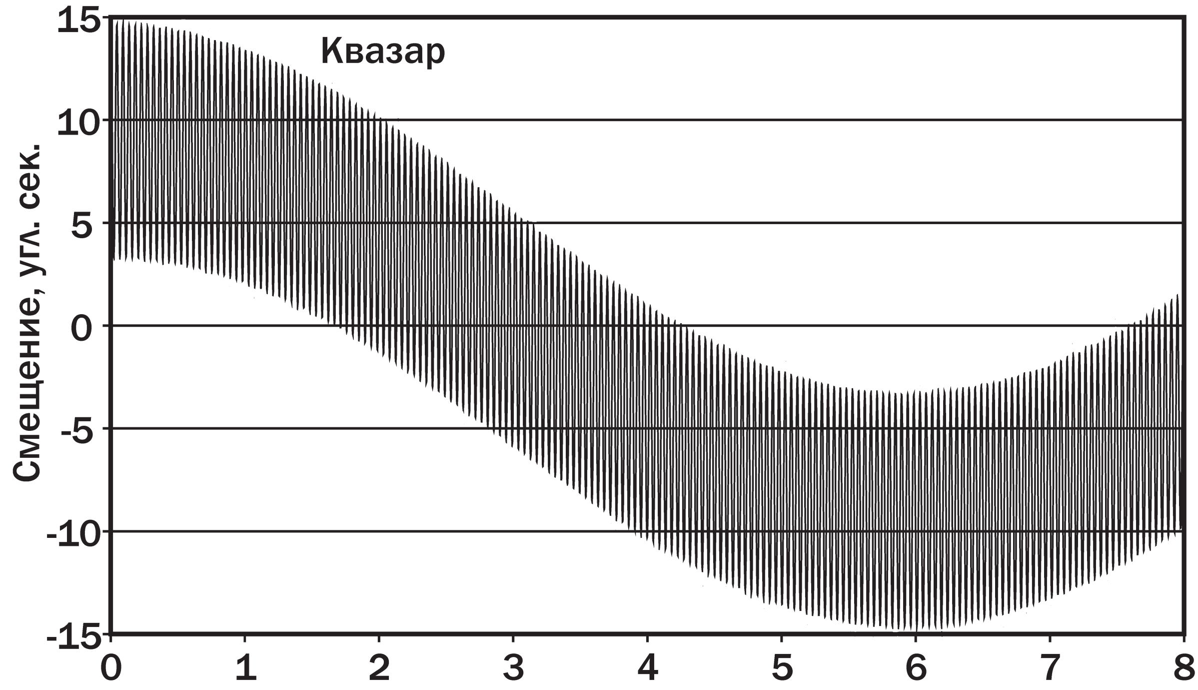
и далее, значение высоты спутника над поверхностью Земли:

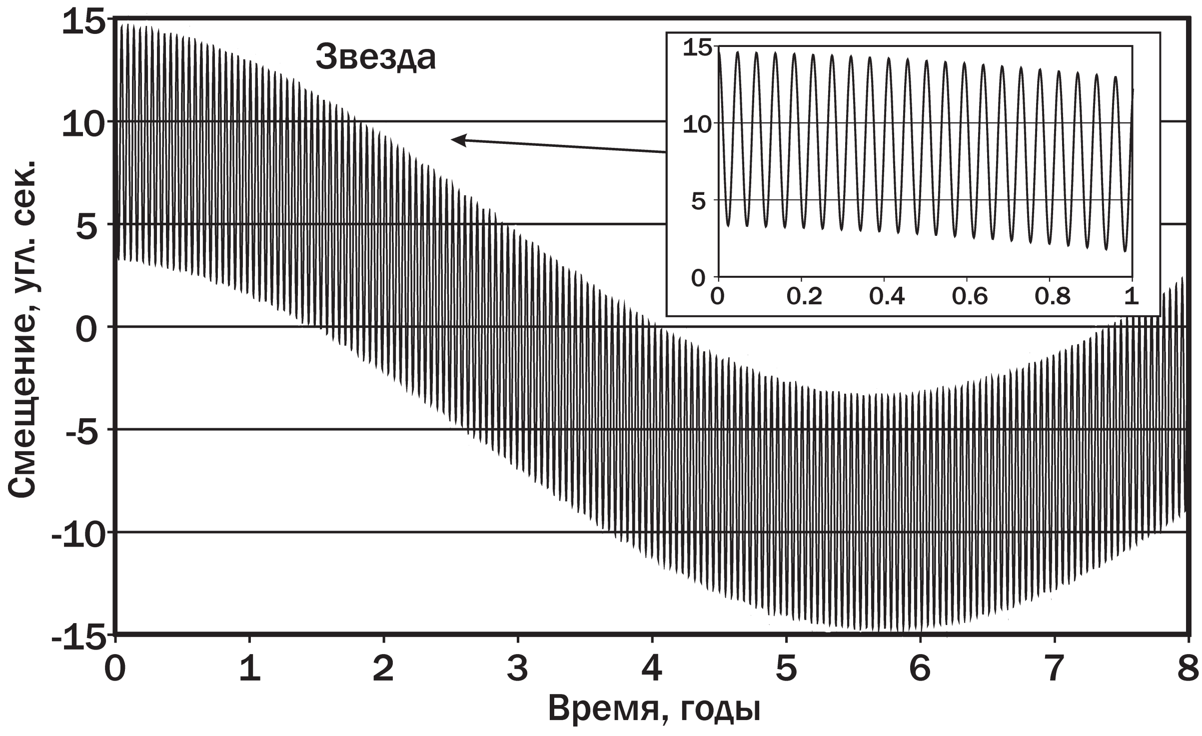
$$H = \sqrt{(R+h)^2 + L^2} - R = 5500\ \text{км}.$$

## 3 ВНЕЗЕМНАЯ ОБСЕРВАТОРИЯ

Е.Н. Фадеев, О.С. Угольников

**На новой обсерватории, построенной на поверхности одного из тел Солнечной системы, проводятся высокоточные измерения видимых положений светил. На графике приведены величины смещения некоторой звезды и находящегося рядом с ней далекого квазара относительно их средних положений вдоль некоторого направления на небе. Смещение квазара и звезды в перпендикулярном направлении мало и не наблюдается. Известно, что звезда одиночная и не имеет собственного движения. Чему равно расстояние до звезды? С какого объекта Солнечной системы проводились наблюдения?**



**!** На положение далеких небесных объектов на небе влияет несколько факторов. Первый из них не связан со свойствами самих объектов и является результатом движения самого наблюдателя – это аберрация света. Величина смещения вследствие аберрации обращается в ноль, если наблюдатель движется к исследуемому объекту или от него. Если же движение происходит перпендикулярно направлению на объект, то аберрация достигает максимального значения

$$a = \frac{v}{c}; \quad a'' = 206265'' \frac{v}{c}.$$

Здесь $v$ – скорость наблюдателя. Аберрация смещает изображение объекта вперед по отношению к движению наблюдателя. Аберрационное смещение не зависит от расстояния до объекта и определяется только его положением на небе. Если два объекта располагаются на небе рядом друг с другом, то их аберрационное смещение будет одинаковым.

Объект может изменять свое положение на небе в результате изменения геометрического положения наблюдателя – это есть параллактическое смещение объекта. При движении по кругу радиусом $R$ параллактическое смещение обращается в ноль, если наблюдатель находится на линии, соединяющий центр его кругового движения (например, Солнце) и объект. Если же наблюдатель удалится на 90°, то параллактическое смещение составит

$$p = \frac{R}{L}; \quad p'' = 206265'' \frac{R}{L}.$$

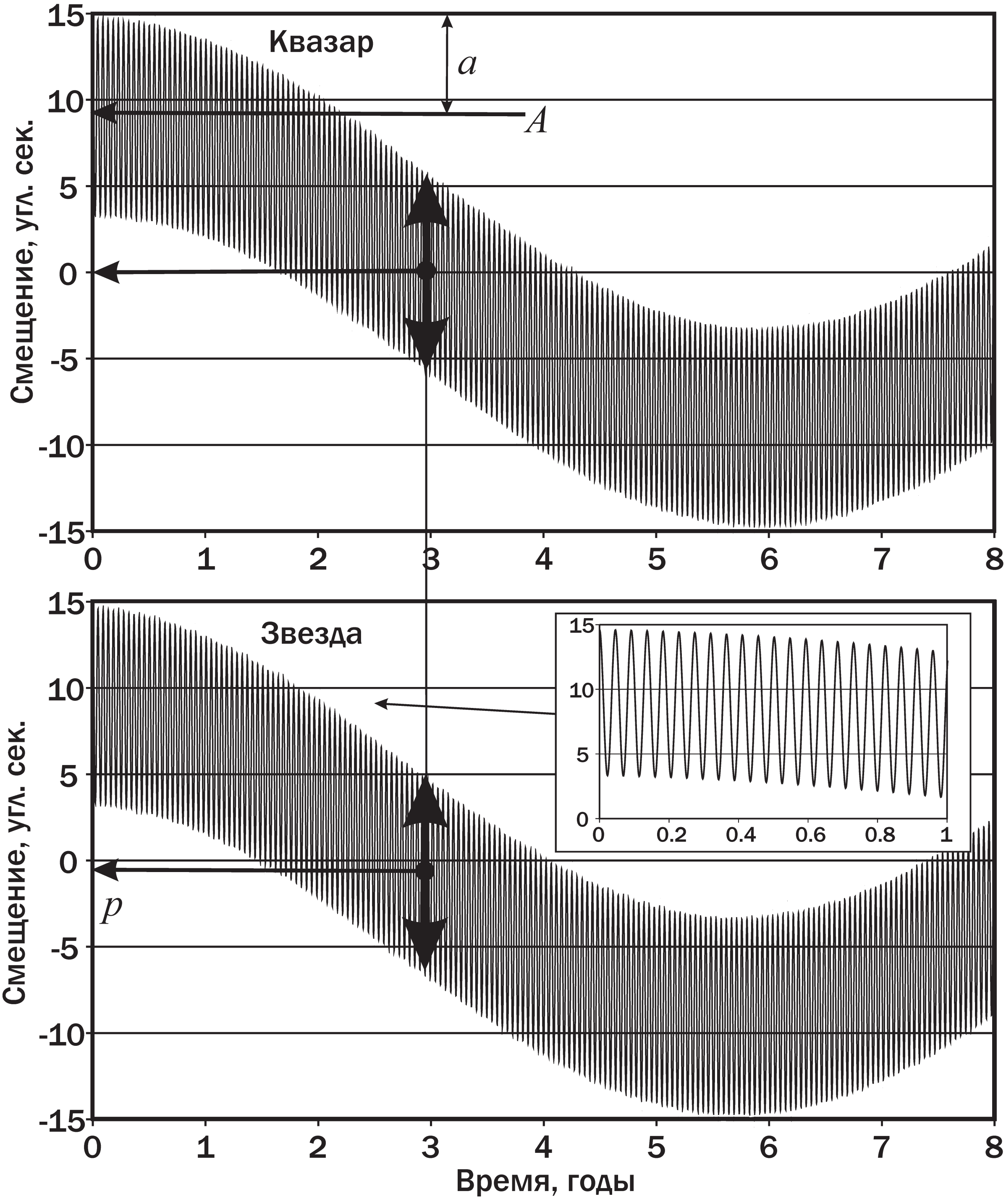
Здесь $L$ – расстояние до объекта. В итоге, если наблюдатель движется по круговой орбите, а объект находится в плоскости этой орбиты, то аберрационное и параллактическое смещение будут иметь период, равный периоду обращения наблюдателя. Но при этом они будут смещены по фазе на 90°: когда аберрационное смещение будет достигать максимума, то параллактическое смещение обратится в ноль и наоборот.

Объект может изменять свое положение в результате своего движения в пространстве (собственное движение) или своего вращения, если он входит в состав двойной или кратной системы. Если говорить о квазарах – активных ядрах далеких галактик – то они не могут иметь собственного движения, а также параллактического смещения, так как расстояние до них очень велико.

По условию задачи, квазар и звезда находятся на небе рядом друг с другом, а их смещение происходит только вдоль одного направления на небе. Собственное движение как у квазара, так и у звезды отсутствует, звезда не является двойной. Следовательно, мы наблюдаем лишь аберрацию и (только для звезды) параллактическое смещение, а движение наблюдателя происходит в плоскости, содержащей исследуемые объекты.

Смещение положения квазара может быть вызвано только аберрацией света. По графику мы видим долгопериодические изменения положения квазара, на которые накладываются быстрые вариации. По-видимому, движение наблюдателя есть комбинация двух вращений с существенно разными периодами. Рассмотрим эти вращения по отдельности.

Аберрация, вызванная долгопериодическим вращением, имеет максимум вблизи момента $t=0$, примерно через 6 лет наступает максимальная аберрация света в противоположном направлении. Следовательно, наблюдатель участвует во вращении с периодом $T$ около 12 лет. Очевидно, это вращение связано с планетой Юпитер, имеющей тот же орбитальный период. В этом можно убедиться следующим образом. Максимальная аберрация (усредненная по короткопериодическим колебаниям) $A$ составляет около 9″. Отсюда мы получаем величину орбитальной скорости:



$$V = c\frac{A''}{206265''},$$

что составляет около 13 км/с. Зная скорость и орбитальный период, мы находим радиус орбиты

$$R = \frac{V \cdot T}{2\pi}.$$

Радиус равен 5.2 а.е. Действительно, тело Солнечной системы, на котором построена обсерватория, вовлечено в движение вокруг Солнца по орбите Юпитера. Но если это был бы сам Юпитер (предположим на короткий момент, что у этой планеты могла быть твердая поверхность) или какой-либо астероид, вращающийся в устойчивой точке Лагранжа по орбите с тем же радиусом, мы бы не наблюдали короткопериодических вариаций. Очевидно, обсерватория находится не на самом Юпитере, а на его спутнике.

Из врезки на графике можно увидеть, что период вращения спутника составляет около 1/22 года или 16-17 суток. Подобный период имеет один из галилеевых спутников планеты, Каллисто. Это можно проверить аналогичным образом, определив радиус орбиты спутника. Максимальная аберрация света за счет короткопериодических вариаций, $a$, составляет $6''$, соответствующая скорость $v$ равна около 8.5-9 км/с, а радиус орбиты $r$ – около 2 млн. км, что соответствует спутнику Каллисто.

Нам необходимо найти расстояние до звезды. График смещений звезды отличается от аналогичного графика для квазара наличием параллактического смещения. Оно заметно сказывается на форме долгопериодических смещений. На короткопериодических смещениях параллакс не сказывается, так как радиус орбиты Каллисто очень мал. Орбита Каллисто наклонена на малый угол к плоскости орбиты Юпитера, и аберрационное смещение происходит вдоль того же направления на небе.

В моменты времени 0 лет и 6 лет, когда аберрация за счет движения Юпитера достигает максимумов (в разных направлениях), параллактическое смещение звезды обращается в ноль, и смещение звезды не отличается от смещения квазара. Возьмем момент времени около 3 лет, когда среднее (по короткопериодическим вариациям) значение смещения квазара обращается в ноль. Мы видим, что модуль аналогичной величины для звезды составляет около $1''$. Это есть параллактическое смещение звезды. Отсюда мы можем получить расстояние до звезды:

$$L = \frac{R}{p}; \quad L\,(\text{пк}) = \frac{R\,(a.e.)}{p''} \approx 5.$$

В последней формуле было учтено, что 1 пк содержит 206265 а.е. Итак, наблюдения велись со спутника Юпитера Каллисто, а расстояние до звезды равно 5 пк.