Методика и система оценивания (проверки) регионального этапа

XXXVI ВСЕРОССИЙСКОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ

2009–2010 учебный год

Первый день

19–20 января 2010 г.

Москва, 2009

Сборник содержит материалы для проведения III этапа XXXVI Всероссийской олимпиады школьников по математике. Задания подготовлены Федеральной методической Комиссией по математике Всероссийской олимпиады школьников.

Сборник составили: Н.Х. Агаханов, А.В. Акопян, В.В. Астахов, И.И. Богданов, С.Г. Волчёнков, А.И. Гарбер, А.А. Глазырин, С.А. Дориченко, О.Ю. Дмитриев, В.Л. Дольников, Л.А. Емельянов, М.И. Исаев, Р.Н. Карасёв, П.А. Кожевников, М.А. Козачок, А.Н. Магазинов, П.В. Мартынов, М.В. Мурашкин, О.К. Подлипский, А.М. Райгородский, И.С. Рубанов, В.А. Сендеров, Д.А. Терёшин, С.И. Токарев, Б.В. Трушин, Д.Г. Храмцов, К.В. Чувилин, В.А. Шмаров.

В скобках после каждой задачи указана фамилия ее автора.

Компьютерный макет: К.В. Чувилин, И.И. Богданов.

Методика и система оценивания (проверки) регионального этапа Всероссийской олимпиады школьников по математике 2009–2010 учебного года.

Олимпиада проводится в два дня (тура) — 19 и 20 января 2010 года. Задания каждого тура содержат по 4 задачи для каждой возрастной группы. Каждый тур олимпиады длится 4 часа.

Решение каждой задачи оценивается целым числом баллов от 0 до 7. Максимальное количество баллов, которое может получить участник, равно 56 (28 — I тур, 28 — II тур).

Задания математических олимпиад являются творческими, допускают несколько различных вариантов решений. Кроме того, необходимо оценивать частичные продвижения в задачах (например, разбор важного случая, доказательство вспомогательного утверждения, нахождение примера и т.п.). Наконец, возможны логические и арифметические ошибки в решениях. Окончательные баллы по задаче должны учитывать всё вышеперечисленное.

Ниже приведена стандартная методика оценивания решений.

11 класс

11.1. Каждый катет прямоугольного треугольника увеличили на единицу. Могла ли его гипотенуза увеличиться более, чем на $\sqrt{2}$?

(С. Волчёнков)

Ответ. Не могла.

Решение. Первое решение. Пусть длины катетов исходного прямоугольного треугольника были равны x и y. Тогда его гипотенуза имела длину $\sqrt{x^2+y^2}$, а после увеличения катетов стала $\sqrt{(x+1)^2+(y+1)^2}$. Предположим, что гипотенуза увеличится более, чем на $\sqrt{2}$. Тогда

$$\sqrt{(x+1)^2+(y+1)^2} > \sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{2} \iff$$

$$\iff (x+1)^2+(y+1)^2 > x^2+y^2+2+2\sqrt{2(x^2+y^2)} \iff$$

$$\iff 2x+2y > 2\sqrt{2(x^2+y^2)} \iff (x+y)^2 > 2(x^2+y^2) \iff$$

$$\iff 2xy > x^2+y^2 \iff 0 > (x-y)^2,$$

что невозможно. Значит, гипотенуза не могла увеличиться более, чем на $\sqrt{2}$.

Второе решение. Расположим исходный и полученный треугольники ABC и $AB'C'$ так, как показано на рис. 5 ($BB' = CC' = 1$). Тогда $\overrightarrow{B'C'} = \overrightarrow{B'B} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{BC} + (\overrightarrow{B'B} + \overrightarrow{CC'})$. Однако сумма двух перпендикулярных единичных векторов $\overrightarrow{B'B} + \overrightarrow{CC'}$ имеет длину $\sqrt{2}$; значит, $|\overrightarrow{B'C'}| \leqslant |\overrightarrow{BC}| + |\overrightarrow{B'B} + \overrightarrow{CC'}| = |\overrightarrow{BC}| + \sqrt{2}$, что и требовалось доказать.

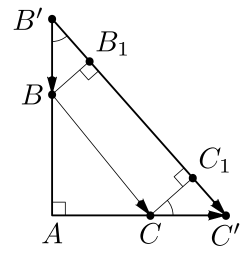

Рис. 5

Третье решение. Расположим треугольники так же, как в предыдущем решении. Пусть B_1, C_1 — проекции точек B и C на $B'C'$, а $\angle AB'C' = \alpha$. Тогда отрезок B_1C_1 является проекцией BC и потому $B_1C_1 \leqslant BC$. Далее, $B'B_1 = BB'\cos\alpha = \cos\alpha$, $C'C_1 = CC'\sin\alpha = \sin\alpha$, и $B'C' = B'B_1 + B_1C_1 + C_1C' \leqslant BC + \cos\alpha + \sin\alpha = BC + \sqrt{2}\sin(45^\circ+\alpha) \leqslant BC + \sqrt{2}$, что и требовалось.

Комментарий. Только ответ без обоснования, с неверным обоснованием или с рассмотрением только нескольких частных случаев — 0 баллов.

11.2. В ряду из 2009 гирек вес каждой гирьки составляет целое число граммов и не превышает 1 кг. Веса любых двух соседних гирек отличаются ровно на 1 г, а общий вес всех гирь в граммах является чётным числом. Докажите, что гирьки можно разделить на две кучки, суммы весов в которых равны. *(Д. Храмцов)*

Решение. Ясно, что веса всех гирь, стоящих на нечётных местах, имеют одинаковую чётность, а веса всех остальных гирь — другую чётность. Так как общий вес чётен, то 1005 гирь на нечётных местах имеют чётные веса.

Поставим первую гирьку на левую чашку весов (пусть ее вес равен $2a \leqslant 1000$ г), остальные 2008 гирь разобьём на 1004 пары стоящих рядом гирек (тогда веса гирек в любой паре отличаются на 1 г). Теперь в некоторых $(502 - a)$ парах поставим более лёгкие гири каждой пары на правую чашку весов, а более тяжёлые — на левую; в остальных же $(502 + a)$ парах поставим лёгкие гири на левую чашку, а тяжёлые — на правую. Тогда разность суммарных весов гирь на левой и правой чашках будет равна $2a + (502 - a) - (502 + a) = 0$, что и требовалось.

Комментарий. Присутствует идея разбиения всех гирь, кроме одной, на пары соседних и раскладывания гирь из одной пары на разные чаши — 2 балла.

11.3. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность с диаметром AC. Точки K и M — проекции вершин A и C соответственно на прямую BD. Через точку K проведена прямая, параллельная BC и пересекающая AC в точке P. Докажите, что угол KPM — прямой. *(Т. Емельянова)*

Решение. Первое решение. Обозначим через E точку пе-

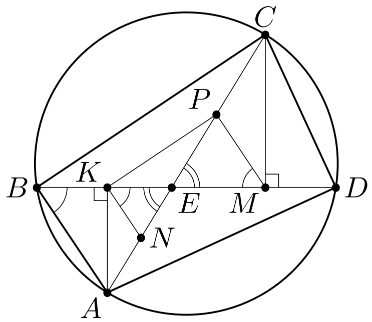

Рис. 6

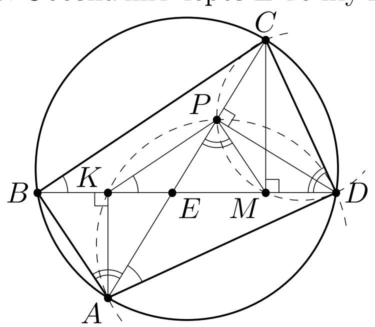

Рис. 7

ресечения диагоналей AC и BD. Пусть для определенности точка K лежит на отрезке BE. Пусть прямая, проходящая через K параллельно PM, пересекает AC в точке N (см. рис. 6). Тогда $\triangle NKE \sim \triangle PME$ (так как их стороны параллельны), откуда $\frac{PE}{EM} = \frac{NE}{EK}$. С другой стороны, прямоугольные треугольники AKE и CME также подобны (по острому углу при вершине E), поэтому $\frac{EM}{EC} = \frac{EK}{EA}$. Перемножая полученные равен-

ства, получаем $\frac{PE}{EC} = \frac{NE}{EA}$. Но по теореме Фалеса $\frac{PE}{EC} = \frac{KE}{EB}$. Итого, мы получили $\frac{NE}{EA} = \frac{PE}{EC} = \frac{KE}{EB}$, откуда $KN \parallel AB$. Значит, и $PM \parallel AB \perp BC \parallel KP$, что и требовалось.

Случай, когда точка K лежит на отрезке DE, рассматривается аналогично.

Второе решение. Опять обозначим через E точку пересечения диагоналей AC и BD и рассмотрим случай, когда точка K лежит на отрезке BE. Заметим, что $\angle PAD = \angle CAD = \angle CBD = \angle PKD$, то есть четырёхугольник $AKPD$ вписан (см. рис. 7). Значит, $\angle AKD = \angle APD = 90^\circ$. Тогда из равенства $\angle CPD = \angle CMD = 90^\circ$ следует вписанность четырёхугольника $CPMD$, откуда $\angle EPM = 180^\circ - \angle CPM = \angle EDC = \angle BAC = \angle BAE$. Отсюда следует, что $PM \parallel AB \perp BC \parallel KP$, что и требовалось.

Случай, когда K лежит на отрезке DE, опять же рассматривается аналогично.

11.4. Назовем тройку натуральных чисел (a, b, c) *квадратной*, если они образуют арифметическую прогрессию (именно в таком порядке), число b взаимно просто с каждым из чисел a и c, а число abc является точным квадратом. Докажите, что для любой квадратной тройки найдётся другая квадратная тройка, имеющая с ней хотя бы одно общее число. *(В. Сендеров)*

Решение. Если $b = 1$, то $a = c = 1$, и в качестве другой тройки можно выбрать $(1, 25, 49)$. Если же $b \neq 1$, то из взаимной простоты разность прогрессии d не может оказаться нулевой. Тогда без ограничения общности $d = b - a = c - b > 0$.

Поскольку b взаимно просто как с a, так и с c, то оно взаимно просто с ac. Далее, произведение взаимно простых чисел ac и b является квадратом, поэтому и каждое из них — также квадрат, то есть $b = f^2$, $ac = m^2 = (b - d)(b + d) = b^2 - d^2$ для некоторых натуральных f и m. При этом $m \neq d$, так как в противном случае $b^2 = m^2 + d^2 = 2m^2$, что невозможно.

Рассмотрим теперь тройку $(b - m, b, b + m)$. Ее члены образуют арифметическую прогрессию, являются натуральными числами (так как $b^2 - m^2 = d^2 > 0$), и их произведение

$(b-m)b(b+m) = f^2(b^2-m^2) = (df)^2$ является квадратом. Кроме того, НОД$(b, m^2) =$ НОД$(b, ac) = 1$, откуда $1 =$ НОД$(b, m) =$ $=$ НОД$(b, b-m) =$ НОД$(b, b+m)$. Значит, эта тройка — квадратная, она имеет общий элемент b с исходной и отлична от нее (ибо $b-m \neq b-d$), что и требовалось.

Комментарий. Решение в целом верно, но упущен случай тройки $(1, 1, 1)$ — снять 1 балл. Для каждой тройки предъявлена другая, имеющая с ней ровно одно общее число, но не проверено, что эти тройки различны — ставить 4 балла.