11 класс

11.5. Предположим, что число $n+1$ составное; покажем, что тогда подходят числа $n+2, \ldots, 2n+1$. Очевидно, их произведение делится на все простые числа из отрезка $[n+2, 2n+1]$, но не делится на простые числа, большие $2n+1$ (ибо все сомножители не превосходят $2n+1$). Для любого же простого $p \leqslant n$, одно из p последовательных чисел делится на p; значит, и одно из наших n чисел также делится на p.

Пусть теперь число $n+1 > 2$ простое; тогда оно нечётно, а число $n+2 > 2$ чётно и потому составное. В этом случае подходят числа $n+3, \ldots, 2n+2$. Действительно, по аналогичным причинам их произведение P делится на все простые числа из отрезков $[1, n]$ и $[n+3, 2n+2]$, но не делится на простые числа, большие $2n+1$ (поскольку число $2n+2$ составное). Кроме того, P делится на $n+1 = \frac{2n+2}{2}$

11.6. **Ответ.** Не могут.

Пусть I_A, I_B, I_C, I_D — центры вписанных окружностей треугольников BCD, ACD, ABD, ABC соответственно. Предположим, что они лежат в одной плоскости. Тогда либо они образуют выпуклый четырёхугольник, либо одна из этих точек лежит в треугольнике, образованном тремя другими.

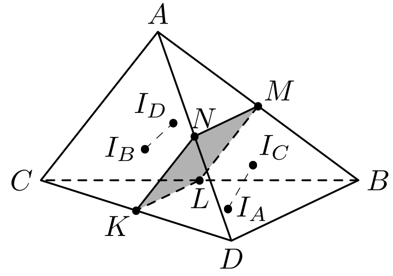

Рис. 5

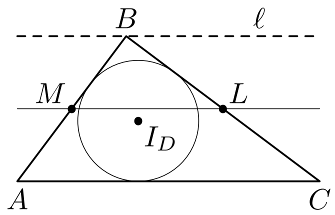

Рис. 6

Случай 1. Пусть без ограничения общности $I_AI_BI_CI_D$ — выпуклый четырёхугольник: тогда отрезки I_AI_C и I_BI_D пересекаются. Обозначим через M, N, K, L середины ребер AB, AD, CD, BC соответственно (см. рис. 5). Рассмотрим треугольник ABC. Проведём через точку B прямую ℓ, параллельную AC; тогда вписанная окружность этого треугольника лежит между прямыми ℓ и AC, касаясь AC, но не касаясь ℓ. Это значит, что точки I_D и B лежат по разные стороны от средней линии ML (см. рис. 6). Аналогично получаем, что точки I_B и I_D окажутся по одну сторону от плоскости $MNKL$, а точки I_A и I_C — по другую. Но тогда отрезки I_BI_D и I_AI_C не могут пересекаться — противоречие.

Случай 2. Осталось показать, что точка I_A не может лежать в треугольнике $I_BI_CI_D$. Это следует из того, что точки I_B, I_C, I_D лежат строго по одну сторону от плоскости BCD, а точка I_A — в этой плоскости.

11.7. Заметим, что максимум функции $|P(x)|$ не может достигаться в точке x_i, ибо $|P(x_i)| = 0$. Рассмотрим произвольную точку $a \in (x_i, x_{i+1})$ при $i < n-1$; положим $t = a - x_i$, $b = x_n - t$. Заметим, что $b \in (x_{n-1}, x_n)$, поскольку $x_n > b > x_n - (x_{i+1} -$

$-x_i) > x_n - (x_n - x_{n-1}) = x_{n-1}$. Покажем, что $|P(b)| > |P(a)|$; из этого, очевидно, следует утверждение задачи.

Из условия следует, что $x_{k+m} - x_k < x_{\ell+m} - x_\ell$ при $1 \leqslant k < \ell \leqslant n-m$. Поскольку нам известны n корней многочлена $P(x)$, имеем $P(x) = p(x-x_1)\ldots(x-x_n)$, где p — старший коэффициент многочлена $P(x)$. Заметим, что $|b-x_s| = x_n - x_s - t > x_{i+n-s} - x_i - t = |x_{i+n-s} - a|$ при $i+1 \leqslant s \leqslant n-1$. Кроме того, $|b-x_r| = b - x_r > x_{n-1} - x_r > a - x_r = |a - x_r|$ при $1 \leqslant r \leqslant i-1$. Перемножая все полученные неравенства с равенством $p|b-x_n||b-x_i| = pt(x_n - x_i - t) = p|a-x_i||a-x_n|$, получаем

$$P(b) = p|b-x_1||b-x_2|\ldots|b-x_n| > \\ > p|a-x_1||a-x_2|\ldots|a-x_n| = P(a),$$

что и требовалось доказать.

11.8. Мы докажем утверждение задачи в более общем виде, для $n \geqslant 2$ предметов и 2^n детей, произвольно разбитых на 2^{n-1} пар соседей. Заметим, что существует ровно 2^n наборов из n предметов; значит, каждый набор предметов интересен ровно одному ученику.

Индукция по n. При $n = 2$ легко проверить утверждение непосредственно. Пусть $n > 2$; рассмотрим любых двух соседей, выберем какой-нибудь предмет, интерес к которому у них различен (скажем, физику), и разобьём всех детей на две группы по 2^{n-1} детей: в группу A попадут те, кому физика интересна, а в группу B — все остальные.

Отселим группу A в другой интернат, с 2^{n-2} комнатами. При этом те пары, что были соседями раньше, оставим соседями. Остальных же (согласно выбору предмета, они есть; при этом их число, очевидно, чётно) разобьем на пары соседей произвольно. Назовем такие пары «новыми».

По предположению индукции, теперь группу A можно расставить по кругу K с выполнением условий. Пусть (x_1, x_2), …, (x_{2k-1}, x_{2k}) — все новые пары в порядке обхода этого круга по часовой стрелке (x_{2i-1} находится перед x_{2i}; мы будем считать, что $x_{2k+1} = x_1$). Обозначим через x'_i исходного соседа человека x_i (по построению, x'_i находится в группе B), и объявим пары

(x'_2, x'_3), …, (x'_{2k-2}, x'_{2k-1}), (x'_{2k}, x'_1) «новыми» парами в группе B. Ясно, что новые пары, вместе со старыми, дают нам разбиение группы B на пары соседей.

Теперь, применив предположение индукции к группе B с этим разбиением, расставим её по кругу с выполнением условий. Вставим теперь между любыми детьми новой пары (x'_{2i}, x'_{2i+1}) отрезок круга K от x_{2i} до x_{2i+1}. Нетрудно видеть, что теперь все дети стоят в кругу, и расстановка удовлетворяет всем условиям.