Всероссийская олимпиада школьников 2012-2013 в городе Москве

Типовые задания I (школьного) этапа по математике

8 класс. Краткие решения.

1. Голова рыбы весит столько, сколько хвост и половина туловища, туловище — столько, сколько голова и хвост вместе. Хвост весит 1 кг. Сколько весит рыба?

Ответ. 8 кг.

Решение 1. Туловище весит столько, сколько голова и хвост, т.е. два хвоста и половина туловища. Значит, половина туловища весит как два хвоста, т.е. туловище весит 4 кг. Тогда голова весит 1+2=3 кг, а вся рыба 4+3+1=8 кг.

Решение 2. Обозначим Г, Т, Х – вес головы, туловища и хвоста соответственно. Тогда по условию Г=Т/2+Х, Т=Г+Х. Откуда Г=(Г+Х)/2+Х, т.е. Г=3Х. Значит, рыба весит Г+Т+Х=3Х+(3Х+Х)+Х=8Х=8 кг.

2. Сумма уменьшаемого, вычитаемого и разности равна 555. Может ли уменьшаемое быть целым числом? Если да, то приведите пример, если нет, то объясните, почему.

Ответ. Нет.

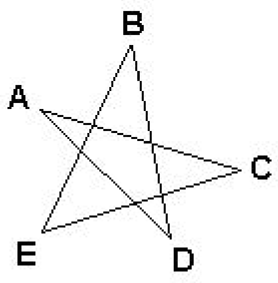
Решение. Так как сумма вычитаемого и разности равна уменьшаемому, то сумма уменьшаемого, вычитаемого и разности равна удвоенному уменьшаемому, т.е. уменьшаемое равно 555/2 – нецелое число.

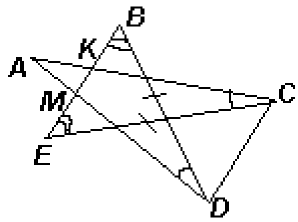
3. В психиатрической больнице есть главный врач и много сумасшедших. В течение недели каждый сумасшедший один раз в день кусал кого-нибудь (возможно и себя). В конце недели оказалось, что у каждого из больных по два укуса, а у главного врача – сто укусов. Сколько сумасшедших в больнице?

Ответ. 20 сумасшедших.

Решение. Пусть в больнице n сумасшедших. Тогда в конце недели, с одной стороны, было сделано 7n укусов, а с другой, 2n+100.Т.е. 7n=2n+100, откуда n=20.

4. В пятиугольной звезде, изображенной на рисунке, $\angle ACE = \angle ADB$ и $\angle DBE = \angle BEC$. Известно также, что BD = CE. Докажите, что $\angle ACD = \angle ADC$.





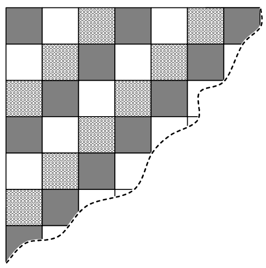
<u>Доказательство.</u> Пусть AC и AD пересекают отрезок BE в точках K и M соответственно (см. рис.). Из условия задачи следует, что треугольники *CEK* и *DBM* равны по стороне и двум прилежащим углам. Следовательно, *CK* = *DM* и ∠*CKE* = ∠*DMB*. Тогда ∠*AKE* = ∠*AMB* (углы, смежные с равными). Получим, что в треугольнике *AMK* равны углы, прилежащие к стороне *MK*, поэтому этот треугольник – равнобедренный (*AK* = *AM*). Следовательно, *AC* = *AK* + *CK* = *AM* + *DM* = *AD*, то есть треугольник *ACD* – также равнобедренный (с основанием *CD*). Поэтому ∠*ACD* = ∠*ADC*, что и требовалось доказать.

5. Дан числовой ребус: ТЭТА+БЭТА=ГАММА. (Разным буквам соответствуют разные цифры, одинаковым – одинаковые.) Найдите все его решения и докажите, что других нет.

<u>Ответ.</u> 4940+5940=10880

<u>Решение.</u> Т.к. Г – результат переноса в следующий разряд, то Г =1. Так как А+А заканчивается на А, то А=0. Значит, переноса в разряд десятков нет, т.е. Т+Т заканчивается на М, и значит, М четно. Переноса в разряд сотен тоже нет, т.к. иначе нечетное число Э+Э+1 заканчивалось бы на четное М. Т.к. переноса нет, то 2Т<10. Возможные варианты 2, 3, 4. Если Т=2, то Э=7, откуда Б=7 – но 7 уже занята. Если Т=3, то М=6, Э=8, откуда Б=6, но 6=М. И последний вариант Т=4. Тогда М=8, Э=9. Откуда Б=5 – противоречия нет. Таким образом, возможен только один вариант: 4940+5940=10880

6. Прямоугольную доску покрасили в три цвета, как показано на рисунке (угловую клетку покрасили в первый цвет, две соседние с ней – во второй, три соседние с только что покрашенными – в третий, следующие соседние с уже покрашенными – снова в первый и т.д.). Может ли для каких-нибудь размеров доски случиться так, что клеток одного цвета будет на две больше, чем какого-то другого?



<u>Ответ.</u> Нет.

<u>Решение.</u> Пусть размеры доски $n\times m$. Будем отрезать от прямоугольника части, в которых всех цветов поровну. При такой раскраске в любом прямоугольнике 3×1 есть клетки всех цветов, значит в любой полоске $3k\times 1$ всех цветов поровну. Пусть n при делении на 3 дает остаток r: $n=3t+r$. Отрежем от исходного прямоугольника кусок $3t\times m$ – в этом куске всех цветов поровну. Остался прямоугольник $r\times m$. Пусть n при делении на 3 дает остаток q: $m=3s+q$. Отрежем от оставшегося прямоугольника $r\times m$ кусок $r\times 3s$ – в нем

всех цветов поровну. Остался прямоугольник $r\times q$. *Т.к.* r *и* q *– остатки при делении на 3 (т.е. числа 0, 1,2), то всевозможные варианты для оставшегося прямоугольника – это*

1) ничего не осталось, т.е. в исходном прямоугольнике клеток всех цветов поровну.

2) остался прямоугольник 1×2. *Т.к. в нем присутствуют два цвета, то в исходном прямоугольнике клеток какого-то одного цвета на одну меньше, чем клеток каждого из двух других цветов.*

3) остался прямоугольник 2×2. *При нашей раскраске в нем будет одна клетка какого-то одного цвета, две – другого и одна – третьего. Т.е. в исходном прямоугольнике клеток какого-то одного цвета на одну больше, чем клеток каждого из двух других цветов.*

Итак, во всех возможных вариантах получается, что максимальный разрыв между количеством клеток разных цветов равен 1.