

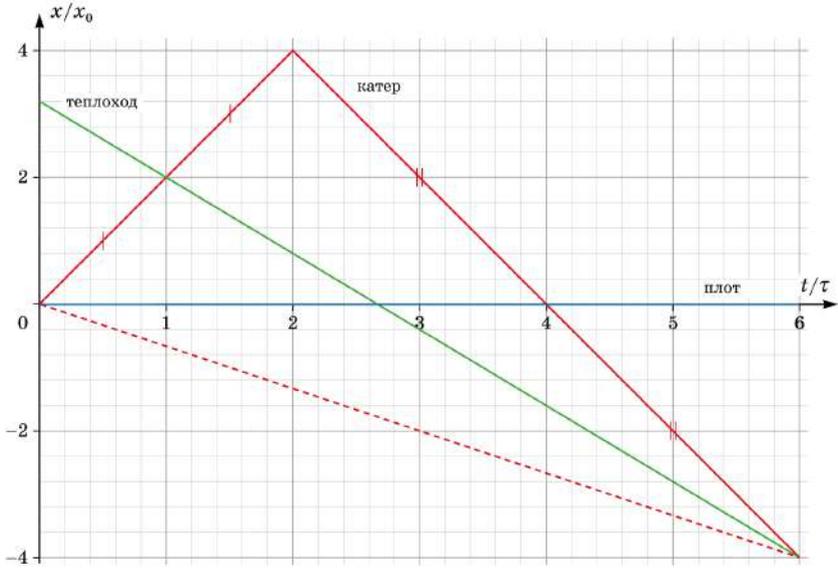
8 класс

Задача №8-Т1. Черти

Обозначим скорость реки - u , а скорости катера и теплохода в СО реки - v_k и v_T соответственно.

Графические методы решения

1 метод (графический в СО реки):



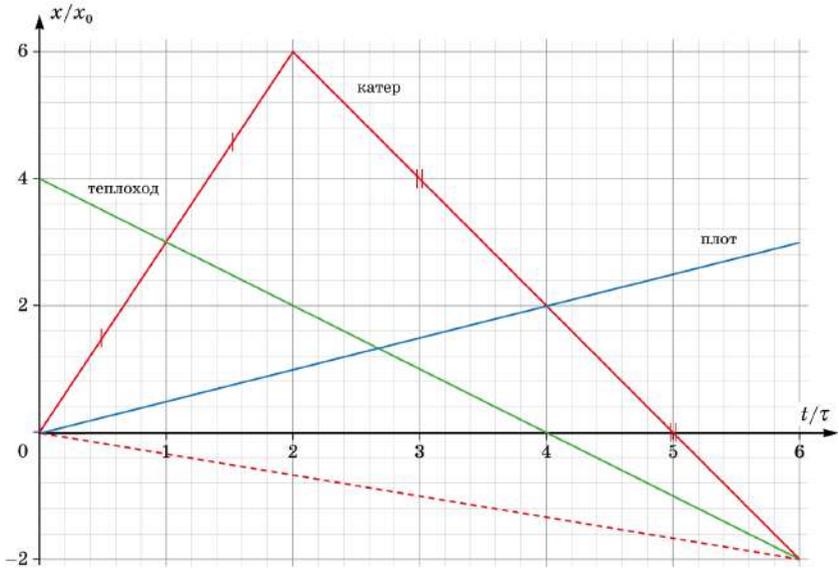
Построим графики зависимостей координат тел в подвижной системе отсчета, связанной с рекой, от времени. Катер и до, и после разворота плыл со скоростью v_k . Так что вторая встреча катера и плота произошла в момент времени 4τ , а вторая встреча катера с теплоходом – в момент времени 6τ . Точка на графике, соответствующая встрече теплохода и плота, является точкой пересечения медиан в красном треугольнике (см. рисунок). Так как медианы треугольника точкой своей пересечения делятся в отношении 2:1, то

$$\tau_0 = \frac{2}{3} \cdot 4\tau = \frac{8}{3}\tau.$$

За время от первой до второй встречи теплохода и катера, катер прошел $10x_0$ (x_0 - условная единица), а теплоход - $6x_0$. Следовательно,

$$\frac{v_k}{v_T} = \frac{5}{3}.$$

2 метод (графический в СО Земли):



Построим графики зависимостей координат тел в системе отсчета Земли. Относительно плота катер и до, и после разворота плыл со скоростью v_k . Так что вторая встреча катера и плота произошла в момент времени 4τ , а вторая встреча катера с теплоходом – в момент времени 6τ . Точка на графике, соответствующая встрече теплохода и плота, является точкой пересечения медиан в красном треугольнике (см. рисунок). Так как медианы треугольника точкой своей пересечения делятся в отношении 2:1, то

$$\tau_0 = \frac{2}{3} \cdot 4\tau = \frac{8}{3}\tau.$$

За время от первой до второй встречи теплохода и катера, перемещение катера составило $(v_k - u)4\tau - (v_k + u)\tau$, а перемещение теплохода – $(v_t - u)5\tau$. Приравнявая соответствующие перемещения, получим

$$\frac{v_k}{v_t} = \frac{5}{3}$$

Аналитические методы решения

3 метод (аналитический в СО Земли):

Запишем уравнения движения тел в СО Земли:

$$\begin{cases} x_{\text{п}} = ut \\ x_{\text{к}} = (v_{\text{к}} + u)t, \text{ при } t \in [0, 2\tau] \\ x_{\text{к}} = (v_{\text{к}} + u)2\tau - (v_{\text{к}} - u)(t - 2\tau), \text{ при } t > 2\tau \\ x_{\text{т}} = x_0 - (v_{\text{т}} - u)t \end{cases}$$

Условие встречи теплохода и катера в момент времени τ :

$$x_0 - (v_{\text{т}} - u)\tau = (v_{\text{к}} + u)\tau,$$

откуда $x_0 = (v_{\text{к}} + v_{\text{т}})\tau$.

Условие второй встречи катера с плотом (в момент времени t_1):

$$(v_{\text{к}} + u)2\tau - (v_{\text{к}} - u)(t_1 - 2\tau) = ut_1,$$

откуда $t_1 = 4\tau$

Следовательно, вторая встреча катера с теплоходом произошла в момент времени 6τ . Условие этой встречи:

$$(v_{\text{к}} + u)2\tau - (v_{\text{к}} - u)(6\tau - 2\tau) = x_0 - (v_{\text{т}} - u)6\tau,$$

откуда

$$\frac{v_{\text{к}}}{v_{\text{т}}} = \frac{5}{3}$$

Условие встречи теплохода и плота:

$$ut_0 = x_0 - (v_{\text{т}} - u)\tau_0,$$

откуда

$$\tau_0 = \tau \frac{v_{\text{к}} + v_{\text{т}}}{v_{\text{т}}} = \frac{8}{3}\tau.$$

4 метод (аналитический в СО реки):

Запишем уравнения движения тел в СО реки:

$$\begin{cases} x_{\text{п}} = 0 \\ x_{\text{к}} = v_{\text{к}}t, \text{ при } t \in [0, 2\tau] \\ x_{\text{к}} = v_{\text{к}}2\tau - v_{\text{к}}(t - 2\tau), \text{ при } t > 2\tau \\ x_{\text{т}} = x_0 - v_{\text{т}}t \end{cases}$$

Условие встречи теплохода и катера в момент времени τ :

$$x_0 - v_{\text{Т}}\tau = v_{\text{К}}\tau,$$

откуда $x_0 = (v_{\text{К}} + v_{\text{Т}})\tau$.

Условие второй встречи катера с плотом (в момент времени t_1):

$$v_{\text{К}}2\tau - v_{\text{К}}(t_1 - 2\tau) = 0,$$

откуда $t_1 = 4\tau$

Следовательно, вторая встреча катера с теплоходом произошла в момент времени 6τ . Условие этой встречи:

$$v_{\text{К}}2\tau - v_{\text{К}}(6\tau - 2\tau) = x_0 - v_{\text{Т}}6\tau,$$

откуда

$$\frac{v_{\text{К}}}{v_{\text{Т}}} = \frac{5}{3}$$

Условие встречи теплохода и плота:

$$0 = x_0 - v_{\text{Т}}\tau_0,$$

откуда

$$\tau_0 = \tau \frac{v_{\text{К}} + v_{\text{Т}}}{v_{\text{Т}}} = \frac{8}{3}\tau$$

Задача №8-Т2. Два автомобиля

Правило моментов относительно точки B после въезда первого автомобиля на мост:

$$NL = Mg\frac{L}{2} + mg(L - vt)$$

Следовательно

$$N = \frac{1}{2}Mg + mg - mg\frac{vt}{L} \quad (1)$$

Правило моментов относительно точки B после въезда второго автомобиля на мост:

$$NL = Mg\frac{L}{2} + mg(L - vt) + mgv(t - \Delta t)$$

Откуда

$$N = \frac{1}{2}Mg + mg - mg\frac{v\Delta t}{L} \quad (2)$$

Правило моментов относительно точки B после съезда первого автомобиля с моста:

$$NL = Mg\frac{L}{2} + mgv(t - \Delta t)$$

То есть

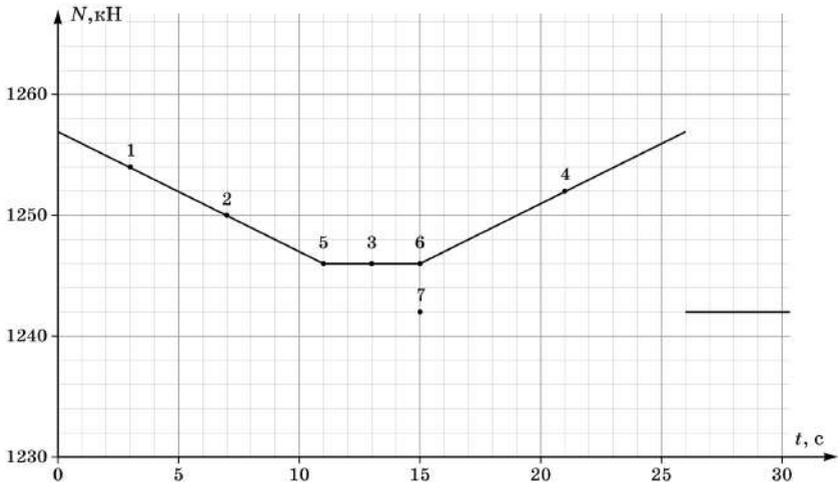
$$N = \frac{1}{2}Mg - mg\frac{v\Delta t}{L} + mg\frac{vt}{L} \quad (3)$$

После того, как второй автомобиль съедет с моста

$$N = \frac{1}{2}Mg \quad (4)$$

С учетом полученных выражений график зависимости $N(t)$ состоит из 4 линейных участков: первый — убывающий, с угловым коэффициентом $-\frac{mgv}{L}$; второй — горизонтальный (N в (2) не зависит от времени); третий — возрастающий, с угловым коэффициентом $\frac{mgv}{L}$; и четвертый — горизонтальный ($N = \frac{1}{2}Mg$). Заметим, что угловые коэффициенты на первом и третьем отрезке одинаковы по величине, но противоположны по знаку. То есть эти отрезки симметричны.

Анализируя точки на исходном графике, не сложно прийти к выводу, что точки 1 и 2 относятся к первому отрезку, точка 3 — ко второму, а 4 — к третьему. При стабильной связи график выглядел бы так:



Каждый из автомобилей проводит на мосту 15 секунд (точка 6 — момент съезда первого автомобиля). А значит длина моста $L = vt_6 = 75$ м.

Время между въездами машин на мост — $\Delta t = 11$ с (начало горизонтального отрезка).

Точка 7, в которую первая прямая пришла бы к 15-й секунде, дает возможность определить массу моста $M = 248,4$ т.

Разность начального значения силы реакции опоры с N_7 дает возможность определить массу автомобиля $m = 1,5$ т.

Задача №8-Т3. Сообщающиеся сосуды

Плотность ρ_2 находим из условия равенства давлений жидкости у дна в левом и правом сосудах:

$$\rho_2 g h + \rho_1 g \left(\frac{3}{2} H - h \right) = \rho_1 g H$$

$$\rho_2 = \rho_1 \left(1 - \frac{H}{2h} \right)$$

Уровни жидкости в двух половинках сосуда сравниются и станут равны $\frac{5H}{4}$, т.е. в левом сосуде уровень опустится на $\frac{H}{4}$, а в правом поднимется на $\frac{H}{4}$. Следует, также, иметь в виду, что согласно условию h всегда больше $\frac{H}{2}$ ($h > \frac{H}{2}$).

В зависимости от величины h в задаче возможны 2 случая.

1. $h < H$, нижняя граница второй жидкости не опустится до уровня трубочки. В этом случае масса поршня находится из условия равенства давлений у дна сосуда:

$$\frac{mg}{S} + \rho_2 g h + \rho_1 g \left(\frac{5H}{4} - h \right) = \rho_1 g \frac{5H}{4}$$

Откуда

$$m = (\rho_1 - \rho_2) h S = \rho_1 \frac{H}{2} S$$

2. В случае $\frac{5H}{4} > h > H$ нижний уровень жидкости с плотностью ρ_2 в процессе опускания поршня дойдет до трубочки, жидкость начнет перетекать в правый сосуд и будет в нем всплывать вверх, так как $\rho_2 < \rho_1$. Теперь, если считать от дна, жидкость с плотностью ρ_1 в левом сосуде доходит до уровня $\frac{H}{4}$, а столб жидкости с плотностью ρ_2 имеет высоту H . Из условия сохранения объемов следует, что столб жидкости с ρ_1 в правом сосуде теперь имеет высоту $(\frac{9H}{4} - h)$, а высота столба жидкости с плотностью ρ_2 равна $(h - H)$.

Отсюда получаем

$$\frac{mg}{S} + \rho_2 g H + \rho_1 g \frac{H}{4} = \rho_1 g \left(\frac{9H}{4} - h \right) + \rho_2 g (h - H)$$

или

$$m = \rho_1 (2H - h) S + \rho_2 (h - 2H) S = \rho_1 \frac{H(2H - h)}{2h} S$$

Задача №8-Т4. Нагреватель

Пусть P – мощность водонагревателя, τ – время, в течение которого вода находится в нагревателе, тогда количество теплоты, переданное нагревателем за это время воде, равно

$$Q_1 = P\tau$$

Суммарное количество теплоты, полученное водой за время нахождения в нагревателе:

$$Q_2 = cm(t_{\text{г}} - t_{\text{н}})$$

Запишем уравнение теплового баланса:

$$P\tau = cm(t_{\text{г}} - t_{\text{н}})$$

Так как масса воды равна $m = \rho V = \rho\mu\tau$, где V – объём нагревателя, то

$$P\tau = c\rho V(t_{\text{г}} - t_{\text{н}})$$

$$P = c\rho\mu(t_{\text{г}} - t_{\text{н}})$$

На графике можем выбрать точки с координатами, которые «хорошо» определяются $t_{\text{г}1} = 45 \text{ }^\circ\text{C}, \mu_1 = 2 \frac{\text{л}}{\text{мин}} = \frac{2}{60} \frac{\text{л}}{\text{с}}$ и $t_{\text{г}2} = 20 \text{ }^\circ\text{C}, \mu_2 = 7 \frac{\text{л}}{\text{мин}} = \frac{7}{60} \frac{\text{л}}{\text{с}}$. Тогда

$$\begin{cases} P = c\rho\mu_1(t_{\text{г}1} - t_{\text{н}}) \\ P = c\rho\mu_2(t_{\text{г}2} - t_{\text{н}}) \end{cases}$$

Из системы получим

$$t_{\text{н}} = \frac{\mu_2 t_{\text{г}2} - \mu_1 t_{\text{г}1}}{\mu_2 - \mu_1} = 10 \text{ }^\circ\text{C}$$

$$P = 4200 \cdot 1000 \cdot \frac{0,002}{60} \cdot (45 - 10) = 4,9 \text{ кВт}$$

Объемный расход, при котором температура нагретой воды будет равна $100 \text{ }^\circ\text{C}$, равен

$$\mu_1 = \frac{4900}{4200 \cdot 1000 \cdot 90} = 1,3 \cdot 10^{-5} \frac{\text{м}^3}{\text{с}} = 0,78 \frac{\text{л}}{\text{мин}}$$

Шифр

 Σ

8-Т1. Черти

№	Пункт разбалловки	Балл	Пр	Ап
1	Метод 1. Построены графики зависимостей координат тел от времени (плот, 2 участка катера, теплоход) в СО реки или в СО Земли.	4 графика по 1.5		
2	Метод 1. Вторая встреча катера и плота произошла в момент времени 4τ .	2.0		
3	Метод 1. Вторая встреча катера с теплоходом произошла в момент времени 6τ .	1.0		
4	Метод 1. $\tau_0 = \frac{8}{3}\tau$.	2.0		
5	Метод 1. Проведено сравнение путей от одной до второй встречи теплохода и катера.	2.0		
6	Метод 1. $\frac{v_K}{v_T} = \frac{5}{3}$.	2.0		
7°	Метод 2. Написаны уравнения движения тел (плот, катер в двух случаях, теплоход) в СО реки или в СО Земли.	4 уравн по 1.0		
8°	Метод 2. Условие встречи теплохода и катера в момент времени τ .	1.0		
9°	Метод 2. Условие второй встречи катера с плотом.	1.0		
10°	Метод 2. Вторая встреча катера и плота произошла в момент времени 4τ .	2.0		
11°	Метод 2. Вторая встреча катера с теплоходом произошла в момент времени 6τ .	1.0		
12°	Метод 2. Условие второй встречи катера с теплоходом.	1.0		
13°	Метод 2. $\frac{v_K}{v_T} = \frac{5}{3}.$	2.0		
14°	Метод 2. Условие встречи теплохода и плота.	1.0		
15°	Метод 2. $\tau_0 = \frac{8}{3}\tau.$	2.0		

Шифр

 Σ **8-Т2. Два автомобиля**

№	Пункт разбалловки	Балл	Пр	Ап
1.1	Правило моментов после въезда первого автомобиля на мост	2.0		
1.2	Правило моментов после въезда второго автомобиля на мост	2.0		
1.3	Правило моментов после съезда первого автомобиля с моста	2.0		
1.4	Правильно восстановлен график (по одному баллу за каждый из 4 отрезков)	4 отрез по 1.0		
2.1	Найдено значение L	2.0		
3.1	Найдено значение Δt	1.0		
4.1	Найдено значение M	1.0		
5.1	Найдено значение m	1.0		

Шифр

 Σ **8-Т3. Сообщающиеся сосуды**

№	Пункт разбалловки	Балл	Пр	Ап
1.1	Записано равенство давлений жидкости в двух сосудах	2.0		
1.2	Получено выражение для плотности второй жидкости $\rho_2 = \rho_1(1 - \frac{H}{2h})$	2.0		
2.1	Для случая $h < H$ записаны уровни жидкостей в первом сосуде	1.0		
2.2	Для случая $h < H$ получено $m = \rho_1 \frac{H}{2} S$	2.0		
2.3	Для случая $\frac{5H}{4} > h > H$ есть понимание, что вторая жидкость перетекает через трубочку и всплывает в правом сосуде (качественное понимание, описание словами)	2.0		
2.4	Найдено, что столб жидкости с ρ_1 в правом сосуде теперь имеет высоту $(\frac{9H}{4} - h)$, а высота столба жидкости с плотностью ρ_2 равна $(h - H)$	2 соотн по 1.5		
2.5	Для случая $\frac{5H}{4} > h > H$ получено $m = \rho_1 \frac{H(2H-h)}{2h} S$	3.0		

Шифр

 Σ **8-Т4. Нагреватель**

№	Пункт разбалловки	Балл	Пр	Ап
1.1	Использована формула для суммарного количества теплоты, переданного нагревателем $Q_1 = Pt$	1.0		
1.2	Использована формула для суммарного количества теплоты, полученного водой $Q_2 = cm(t_{\Gamma} - t_{\text{н}})$	1.0		
1.3	Составлено уравнение теплового баланса $Q_1 = Q_2$. Если сразу записан правильный эквивалент формулы $Pt = cm(t_{\Gamma} - t_{\text{н}})$, то за пункты 1, 2, 3 ставится полный балл	2.0		
1.4	Использована формула $m = \rho V$	1.0		
1.5	Записана или используется в процессе решения формула, связывающая объем нагревателя V и μ ($V = \mu t$)	1.0		
1.6	Получена формула, связывающая мощность нагревателя и объемный расход или эквивалентная	1.0		
1.7	На графике выбраны две хорошие точки и составлена система уравнений	1.0		
1.8	Объемный расход переведен в $\frac{\text{л}}{\text{с}}$ или $\frac{\text{м}^3}{\text{с}}$	0.5		
1.9	Правильно найдена мощность нагревателя P	2.0		
2.1	Правильно найдена температура холодной воды $t_{\text{н}}$	2.0		
3.1	Составлено выражение для μ_1	0.5		
3.2	Правильно найден объемный расход μ_1	2.0		