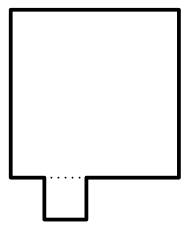
Всероссийская олимпиада школьников по математике. 2017–2018 уч. год.
Школьный этап.

10 класс

1. *(7 баллов)* Замок Персиваля имел квадратную форму. Однажды Персиваль решил расширить свои владения и добавил к замку квадратную пристройку. В результате периметр замка увеличился на 10%. На сколько процентов увеличилась площадь замка?



Ответ: 4%.

Решение. Пусть ширина замка равна a, а ширина пристройки — b. Тогда первоначальный периметр равен $4a$, а итоговый периметр равен $4a + 2b$. Тогда:

$$1{,}1 \cdot 4a = 4a + 2b \Leftrightarrow b = 0{,}2a\,.$$

Отсюда площадь замка стала равна $a^2 + (0{,}2a)^2 = 1{,}04a^2$, то есть площадь увеличилась на 4%.

Критерии. Любое верное решение: 7 баллов.
Верно найдена сторона пристройки, однако дальнейшее решение отсутствует или неверно: 4 балла.
Приведён только верный ответ: 0 баллов.

2. *(7 баллов)* Известно, что $a^2 + b = b^2 + c = c^2 + a$. Какие значения может принимать выражение $a(a^2 - b^2) + b(b^2 - c^2) + c(c^2 - a^2)$?

Ответ: 0.

Решение. Заметим, что равенство $a^2 + b = b^2 + c$ можно записать в виде: $a^2 - b^2 = c - b$. Аналогично имеем $b^2 - c^2 = a - c$, $c^2 - a^2 = b - a$. Подставляя эти равенства в искомые выражения, получаем, что

$$a(a^2 - b^2) + b(b^2 - c^2) + c(c^2 - a^2) = a(c - b) + b(a - c) + c(b - a) = 0\,.$$

Критерии. Любое верное решение: 7 баллов.
Приведён только верный ответ: 0 баллов.

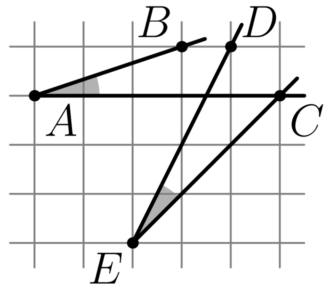
3. *(7 баллов)* На доске в произвольном порядке выписаны числа от 1 до 2017. Два числа можно поменять местами, если одно из них делится на другое. Докажите, что за несколько таких операций числа можно расположить в порядке возрастания.

Решение. Покажем, как поставить число $k \neq 1$ на k-ое место. Пусть на k-ом месте стоит число n. Поменяем сначала n с 1, затем поменяем k с 1. Тогда k действительно окажется на своём месте.

Последовательно ставя на свои места числа 2017, 2016, …, мы поставим все числа в порядке возрастания.

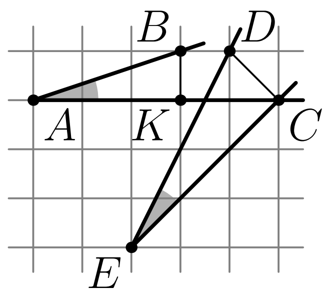
Критерии. Любой верный алгоритм действий: 7 баллов.
На примере маленького количества чисел (например, для трёх или четырёх) показано, как расставить числа в порядке возрастания: 0 баллов.

4. *(7 баллов)* Сравните величины углов BAC и CED (см. рисунок). Свой ответ обоснуйте.



Ответ: эти углы равны.

Решение. Пусть K — основание перпендикуляра, опущенного из B на AC.



Рассмотрим треугольники ABK и EDC. Они оба прямоугольные, причем их катеты относятся как $1:3$. Значит, тангенсы отмеченных углов равны $1/3$, то есть сами углы тоже равны.

Критерии. Любое верное решение: 7 баллов.
Приведён только верный ответ: 0 баллов.

5. *(7 баллов)* Лёша не поленился вычислить сумму

$$9+99+999+\ldots+\underbrace{9\ldots9}_{2017}$$

и выписать ее на доску. Сколько раз в итоговом результате записана цифра 1?

Ответ: 2013.

Решение. Преобразуем выражение:

$$9+99+999+\ldots+\underbrace{9\ldots9}_{2017}=(10-1)+(100-1)+\ldots+(10^{2017}-1)=$$
$$=\underbrace{1\ldots1}_{2017}0-2017=\underbrace{1\ldots1}_{2013}09093.$$

Критерии. Любое верное решение: 7 баллов.

Показано, что исходная сумма равна $\underbrace{1\ldots1}_{2017}0-2017$, но дальнейшее решение отсутствует или в нём допускается арифметическая ошибка: 5 баллов.

Приведён только верный ответ: 1 балл.

6. *(7 баллов)* Несколько мудрецов построилось в колонну. На всех были либо черные, либо белые колпаки. Оказалось, что среди любых 10 подряд идущих мудрецов поровну мудрецов с белыми и с черными колпаками, а среди любых 12 подряд идущих — не поровну. Какое наибольшее количество мудрецов могло быть?

Ответ: 15 мудрецов.

Решение. Докажем, что больше 15 мудрецов быть не может. Предположим противное, пусть мудрецов хотя бы 16. Последовательно занумеруем всех мудрецов. Рассмотрим девять подряд идущих мудрецов. Если к ним добавить одного из двух соседних мудрецов, то среди них будет одинаковое число мудрецов с белыми и чёрными колпаками, поэтому на любых мудрецах, между которыми находится 9 мудрецов, надеты колпаки одинакового цвета.

Без ограничения общности, на первом мудреце надет чёрный колпак. Тогда на одиннадцатом мудреце также чёрный колпак. Если на двенадцатом мудреце надет белый колпак, то среди первых двенадцати мудрецов будет поровну белых и чёрных колпаков. Поэтому на двенадцатом мудреце надет чёрный колпак, откуда и на втором мудреце надет чёрный колпак. Аналогично рассмотрев мудрецов со второго по одиннадцатого, получим что на мудрецах 3 и 13 надеты колпаки чёрного цвета. Рассмотрев мудрецов с третьего по двенадцатого, получим, что на мудрецах 4 и 14 надеты колпаки чёрного цвета. Аналогично на мудрецах 5 и 15, 6 и 16 надеты колпаки чёрного цвета. Но тогда среди первых десяти мудрецов на первых шести чёрные колпаки, поэтому чёрных колпаков будет больше. Противоречие.

15 мудрецов может быть: пусть на первых 5 и последних 5 мудрецах надеты чёрные колпаки, а на оставшихся 5 надеты белые колпаки. Несложно понять, что тогда условие задачи будет выполнено.

Критерии. Любое верное решение: 7 баллов.

Доказано, что больше 15 мудрецов не может быть, но не приведён пример, как надеть колпаки на 15 мудрецов: 6 баллов.

Доказано, что на двух мудрецах, между которыми стоят 9 мудрецов, надеты колпаки одинакового цвета, однако дальнейшее рассуждение отсутствует или неверно: 2 балла.

Приведён пример расстановки 15 мудрецов, удовлетворяющей условию, но не доказано, что больше мудрецов поставить нельзя: 1 балл.

Приведён только верный ответ: 0 баллов.