Введение

Порядок проведения, методика и система оценивания (проверки) регионального этапа Всероссийской олимпиады школьников по математике 2017–2018 учебного года.

Региональный этап Всероссийской олимпиады школьников по математике 2017–2018 учебного года проводится по заданиям, подготовленным Центральной предметно-методической комиссией, в единые для всех субъектов РФ сроки: **31 января 2018 г.** (I тур) и **1 февраля 2018 г.** (II тур). Региональный этап проводится по отдельным заданиям для учащихся 9, 10 и 11 классов.

Задания для каждого класса включают 10 задач — по 5 задач в каждом из двух дней (туров) Олимпиады (задачи 1–5 — I тур, задачи 6–10 — II тур). Продолжительность каждого тура для каждого класса составляет 4 астрономических часа.

В силу того, что во всех субъектах Российской Федерации региональный этап проводится по одним и тем же заданиям, подготовленным Центральной предметно-методической комиссией, в целях предотвращения преждевременного доступа к текстам заданий со стороны участников Олимпиады, а также их учителей и наставников, время начала и окончания туров в установленные даты в каждом субъекте РФ должно определяться в соответствии с **«Временны́ми регламентами проведения туров регионального этапа Всероссийской олимпиады школьников в субъектах Российской Федерации в 2017–2018 учебном году»** для часовых поясов.

Показ работ, проведение апелляций и разбор задач в субъектах Российской Федерации, где тур оканчивается в 16.00 и 17.00 по местному времени, проводятся не раньше, чем на следующий день после проведения второго тура Олимпиады.

В остальных субъектах Российской Федерации рекомендуется также осуществлять показ работ и проведение апелляций не раньше, чем на следующий день после проведения второго тура Олимпиады.

Победители и призёры олимпиады определяются Порядком проведения Всероссийской олимпиады школьников и Требованиями к проведению регионального этапа Всероссийской олимпиады школьников по математике в 2017–2018 учебном году.

Решение каждой задачи оценивается целым числом баллов от 0 до 7. Максимальное количество баллов, которое может получить участник, равно 70 (35 — I тур, 35 — II тур).

Задания математических олимпиад являются творческими, допускают несколько различных вариантов решений. Кроме того, необходимо оценивать частичные продвижения в задачах (например, разбор важного случая, доказательство вспомогательного утверждения, нахождение примера и т.п.). Наконец, возможны логические и арифметические ошибки в решениях. Окончательные баллы по задаче должны учитывать всё вышеперечисленное.

Ниже приведена стандартная методика оценивания решений.

Баллы	**Правильность (ошибочность) решения**
7	Полное верное решение.
6–7	Верное решение, но имеются небольшие недочёты, в целом не влияющие на решение.
5–6	Решение в целом верное. Однако оно содержит ошибки, либо пропущены случаи, не влияющие на логику рассуждений.
3–4	В том случае, когда решение задачи делится на две равноценные части — решение одной из частей.
2–3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
0–1	Рассмотрены отдельные случаи при отсутствии решения.
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

Важно отметить, что любое правильное решение оценивается в 7 баллов. Недопустимо снимать баллы за то, что текст решения слишком длинный, или за то, что верное решение школьника отличается от приведённого в данной методической разработке или от других решений, известных жюри. В то же время любой сколь угодно длинный текст, не содержащий полезных продвижений, должен быть оценен в 0 баллов.

Ниже приведены ответы и решения к задачам олимпиады. В комментариях к задачам указаны критерии оценивания (в баллах) некоторых предполагаемых ошибок и частичных продвижений. Заметим, что работа участника, помимо приведённых, может включать другие содержательные продвижения и ошибки, которые должны быть оценены дополнительно.

Желаем успешной работы!

Авторы и составители сборника

Условия и решения задач

9 класс

9.6. На бесконечной ленте бумаги выписаны в порядке возрастания все натуральные числа с суммой цифр 2018. Какое число написано на 225-м месте? (*Методкомиссия*)

Ответ. $3\underbrace{999\ldots99}_{223\text{ девятки}}8$.

Решение. Поскольку $2018 = 224 \cdot 9 + 2$, наименьшее число с суммой цифр 2018 будет равняться $2\underbrace{999\ldots99}_{224\text{ девятки}}$. В этом числе 225 знаков. Рассмотрим 225-значные числа, у которых старшая цифра будет тройкой, а остальные цифры — девятки, за исключением ровно одной восьмерки. Таких чисел в точности 224 (именно столько положений для восьмерки) и у каждого из них сумма цифр 2018. Самым большим среди этих чисел будет число $N = 3\underbrace{999\ldots99}_{223\text{ девятки}}8$. Поскольку все остальные 225-значные числа с суммой цифр 2018 будут иметь старшую цифру не меньшую четырех, они будут больше указанных чисел и, значит, N будет 225-ым по счёту числом с суммой цифр 2018.

Комментарий. Только верный ответ без обоснования — 3 балла.

Если участник обсчитался и получил неверный ответ при верном ходе рассуждений — не более 5 баллов.

В работе верно найдено самое маленькое число с суммой цифр 2018, дальнейших продвижений нет — 1 балл.

9.7. Изначально по кругу расставлены 40 синих, 30 красных и 20 зелёных фишек, причём фишки каждого цвета идут подряд. За ход можно поменять местами стоящие рядом синюю и красную фишки, или стоящие рядом синюю и зелёную фишки. Можно ли за несколько таких операций добиться того, чтобы любые две стоящие рядом фишки были разных цветов? (*С. Берлов*)

Ответ. Нет.

Решение. Поскольку красные фишки не могут меняться местами с зелёными, их взаимный порядок всегда будет оставаться таким же, как исходный. Иначе говоря, если в любой момент убрать синие фишки, то останутся 30 красных фишек, стоящих подряд, и 20 зелёных, также стоящих подряд. Если требуемого удалось добиться, это означает, что мы удалили хотя бы по одной синей фишке с каждого из 29 интервалов между соседним красными фишками и с каждого из 19 интервалов между соседними зелёными фишками; но тогда синих фишек было бы не меньше, чем $29 + 19 = 48 > 40$, что не так. Значит, требуемое невозможно.

Комментарий. Замечено только, что взаимный порядок красных и зелёных фишек сохраняется — 3 балла.

9.8. Серёжа выбрал два различных простых числа p и q. Он считает натуральное число n *хорошим*, если число $p + q$ можно представить в виде суммы ровно q чисел, каждое из которых имеет вид n^k при целом неотрицательном k. (Например, если бы Серёжа выбрал $p = 7$ и $q = 3$, то он бы счёл число $n = 2$ хорошим, поскольку $7 + 3 = 2^3 + 2^0 + 2^0$). Докажите, что Серёжа считает хорошими не более двух чисел. (*С. Волчёнков*)

Решение. Пусть n является хорошим числом. Тогда $n > 1$, и для некоторых целых неотрицательных чисел k_1, k_2, $\ldots$, k_q справедливо равенство

$$p + q = n^{k_1} + n^{k_2} + \ldots + n^{k_q}.$$

Рассмотрим остаток от деления правой части на $n-1$. Поскольку любая степень числа n дает остаток 1 при делении на $n - 1$, правая часть сравнима с q по модулю $n - 1$. Тогда с q сравнима и левая часть; следовательно, p делится на натуральное число $n - 1$. Но у простого числа p только два натуральных делителя: 1 и p. Значит, $n - 1$ может равняться 1 и p. Стало быть, $n = 2$ или $n = p + 1$, и поэтому хороших чисел не больше двух.

Замечание. Число $n = p + 1$ всегда является хорошим, поскольку $p + q = n^1 + \underbrace{n^0 + n^0 + \ldots + n^0}_{q-1 \text{ слагаемое}}$. А число $n = 2$ может оказаться хорошим, а может и не оказаться. Например, для $p = 59$ и $q = 3$ число $p + q = 62$ нельзя представить в виде суммы трёх степеней двойки, поскольку $2^5 + 2^4 + 2^3 = 56 < 62$.

Комментарий. Только показано, что число $p+1$ хорошее — 1 балл.

Если в работе сделано (верное) утверждение о том, что хорошими числами могут являться лишь 2 и $p+1$, но доказательство этого факта отсутствует или неверно — 1 балл (может суммироваться с предыдущим).

9.9. В окружности ω с центром в точке O провели непересекающиеся хорды AB и CD так, что $\angle AOB = \angle COD = 120^\circ$. Касательная к ω в точке A пересекает луч CD в точке X, а касательная к ω в точке B пересекает луч DC в точке Y. Прямая ℓ проходит через центры окружностей, описанных около треугольников DOX и COY. Докажите, что ℓ касается ω. (*А. Кузнецов*)

Первое решение. Обозначим через Z точку пересечения лучей XA и YB (см. рис. 1). Прямые ZA и ZB касаются окружности ω, поэтому $\angle OAZ = \angle OBZ = 90^\circ$. Тогда $\angle AZB = 360^\circ - 90^\circ - 90^\circ - \angle AOB = 60^\circ$. Поскольку окружность ω касается сторон угла XZY, её центр O лежит на биссектрисе этого угла, то есть $\angle XZO = 30^\circ = \angle OZY$.

Из равнобедренного треугольника COD получаем $\angle OCD = \angle ODC = 30^\circ$. Тогда $\angle OZX + \angle ODX = 30^\circ + 180^\circ - \angle ODC = 180^\circ$, поэтому четырёхугольник $XDOZ$ вписан. Аналогично, вписан и четырёхугольник $YCOZ$. Таким образом, OZ — общая хорда окружностей, описанных около треугольников DOX и COY, поэтому ℓ — серединный перпендикуляр к отрезку OZ.

Пусть M — середина OZ. Прямая ℓ проходит через M и перпендикулярна OM; поэтому для завершения решения достаточно показать, что точка M лежит на ω. В прямоугольном треугольнике AZO имеем $\angle AZO = 30^\circ$, поэтому $AO = \frac{1}{2}OZ = OM$, откуда и следует требуемое.

Второе решение. Обозначим через T середину меньшей дуги AB окружности ω (см. рис. 2). Тогда $\angle AOT = 60^\circ$ и $OA = OT$. В равнобедренном треугольнике COD имеем $\angle COD = 120^\circ$, откуда $\angle ODC = \angle OCD = 30^\circ$ и, следовательно, $\angle ODX = \angle OCY = 150^\circ$.

Пусть O_1 — центр окружности, описанной около треугольника DOX. Тогда $\angle OO_1X = 2(180^\circ - \angle ODX) = 60^\circ$. Зна-

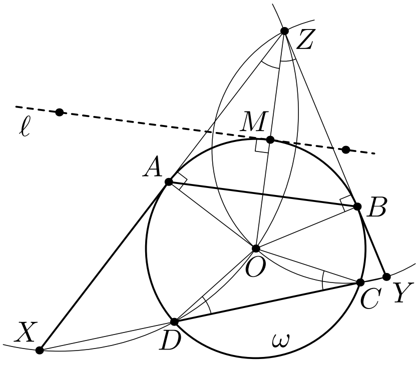

Рис. 1

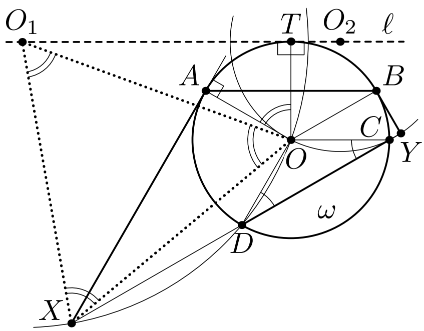

Рис. 2

чит, треугольник OO_1X равносторонний, поэтому $\angle XOO_1 = 60^\circ = \angle AOT$. Следовательно, $\angle TOO_1 = \angle AOX$. Кроме того, $OT = OA$ и $OO_1 = OX$, а значит, треугольники TOO_1 и AOX равны. Отсюда $\angle OTO_1 = \angle OAX = 90^\circ$, то есть точка O_1 лежит на касательной к ω в точке T. Аналогично, центр O_2 окружности, описанной около $\triangle COY$, также лежит на этой касательной; значит, прямая ℓ совпадает с этой касательной.

Замечание. Последний аргумент можно оформить по-другому. Поскольку треугольники AOT и XOO_1 равносторонние, при повороте с центром в точке O на 60° прямая AX переходит в прямую TO_1, а окружность ω переходит в себя. Так как прямая AX касается ω, то и прямая TO_1 также касается ω.

9.10. В компании 100 детей, некоторые дети дружат (дружба всегда взаимна). Известно, что при выделении любого ребёнка оставшихся 99 детей можно разбить на 33 группы по три человека так, чтобы в каждой группе все трое попарно дружили. Найдите наименьшее возможное количество пар дружащих детей.

(*С. Берлов, Н. Власова*)

Ответ. 198.

Решение. Переведём задачу на язык графов, сопоставляя ребёнку вершину, а дружбе — ребро. Тогда нам известно, что в данном графе на 100 вершинах при удалении любой вершины оставшиеся можно разбить на 33 тройки так, что в каждой тройке вершины попарно соединены. Требуется же найти минимальное возможное число рёбер в таком графе.

Для начала построим пример ровно с 198 рёбрами. Разобьём 99 вершин, кроме вершины A, на 33 группы по 3 вершины. Соединим попарно вершины в каждой тройке; наконец, соединим A со всеми другими вершинами. Тогда условия задачи выполнены: при удалении A разбиение на тройки уже приведено, а при удалении любой другой вершины B в этом же разбиении достаточно заменить B на A. При этом в описанном графе всего $33 \cdot 3 + 99 = 198$ рёбер.

Осталось доказать, что это количество — наименьшее. Назовём граф на $3k+1$ вершинах *хорошим*, если при удалении любой вершины остальные $3k$ вершин разбиваются на k троек попарно соединённых. Докажем индукцией по k, что в хорошем графе на $3k+1$ вершинах хотя бы $6k$ рёбер; при $k = 33$ получим требуемую оценку. База при $k = 1$ несложна: так как при удалении любой вершины три остальных попарно соединены, любые две вершины должны быть соединены, то есть число рёбер равно $C_4^2 = 6$.

Докажем переход индукции. Если из каждой вершины выходит хотя бы по 4 ребра, общее количество рёбер не меньше, чем $(3k+1) \cdot 4/2 = 2(3k+1)$, что даже больше, чем требуемое $6k$. В противном случае найдётся вершина A, соединённая не более, чем с тремя другими. Если удалить любую вершину, кроме A, то A попадёт в какую-то тройку, а значит, она соединена хотя бы с двумя вершинами. Если удалить одну из этих вершин, у A останется не менее двух смежных, то есть было их не меньше трёх. Итак, A соединена ровно с тремя вершинами B, C и D. Тогда при удалении, скажем, B вершины A, C и D образуют тройку, то есть C и D соединены; аналогично получаем, что B, C и D попарно соединены.

Выбросим теперь из нашего графа вершины A, B, C и D, взамен добавив одну вершину X, соединённую со всеми, с кем была соединена хотя бы одна из вершин B, C и D. Заметим, что при этом количество рёбер уменьшилось хотя бы на 6 (т. е. на количество рёбер между A, B, C и D). Покажем, что полученный *новый граф* хороший; отсюда будет следовать переход индукции, ибо тогда в новом графе будет не менее $6(k-1)$ рёбер, а значит, в исходном — не менее $6(k-1) + 6 = 6k$ рёбер.

Пусть из нового графа удалена некоторая вершина $Y \neq X$. Если её удалить из исходного графа, остальные вершины разобьются на тройки; пусть при этом вершина A окажется, для определённости, в тройке с B и C, а вершина D — в другой тройке. Тогда можно разбить новый граф так же, поместив вершину X в ту тройку, где была вершина D. Наконец, если удалить из нового графа вершину X, можно проделать ту же операцию, считая, что из исходного графа удалена вершина D (тогда A, B и C автоматически окажутся в одной тройке). Таким образом, переход индукции доказан.

Замечание. Приведённый пример — не единственный. Рассуждение из второй части решения по сути показывает, что много различных оптимальных примеров можно построить следующим индуктивным образом. При $k = 1$ возьмём 4 вершины и соединим все пары рёбрами. При переходе от k к $k+1$ добавим три вершины B, C, D, соединим их попарно друг с другом, а также соединим их всех с какой-то уже имеющейся вершиной A.

В таком примере всегда будет $6k$ рёбер, и он будет удовлетворять условию задачи.

Комментарий. Только верный ответ — 0 баллов.

Только приведён пример с 198 парами дружащих — 1 балл.

Примеры с бóльшим количеством пар дружащих не оцениваются.

Только доказано, что количество пар дружащих не меньше 198 — 6 баллов.