11 класс

Задача 1. Сообщающиеся сосуды. В двух одинаковых сообщающихся вертикальных цилиндрических сосудах находится жидкость плотности ρ. Первоначальный уровень жидкости в сосудах $l = 10$ см от дна (рис. 1). Сосуды соединены через отверстия в их дне маленькой трубочкой пренебрежимо малого объема. В левом сосуде на высоте $2l$ от дна находится лёгкий поршень, который может свободно перемещаться без трения о стенки. Под поршнем находится воздух при атмосферном давлении $p_0 = 2\rho gl$. С момента времени $t = 0$ в левый сосуд в пространство над поршнем начинает поступать жидкость плотности ρ, причем скорость прироста её уровня над поршнем составляет υ = 0,2 мм/с.

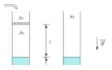

Рис. 1

1) С какой скоростью движется поверхность жидкости в правом сосуде в начале процесса?

2) С какой скоростью и в каком направлении (вверх или вниз) движется поверхность жидкости над поршнем в начале процесса?

3) На какой высоте z от дна сосуда будет находиться поверхность жидкости над поршнем

а) через 600 с? б) через 1100 с?

Температуру в сосудах можно считать постоянной. Жидкость из сосудов не выливается.

Возможное решение (Аполонский А.). 1) Пусть через малое время Δt после начала поступления жидкости на поршень высота столба жидкости в правом цилиндре возросла на Δh. Из условия гидростатического равновесия в сосудах

$$p_0 + \rho g\left(l + \Delta h\right) = p_0 + \rho g\upsilon\Delta t + \rho g\left(l - \Delta h\right).$$

Из этого уравнения находим скорость поднятия жидкости в правой части сосуда в начале процесса:

$$\upsilon_П = \frac{\Delta h}{\Delta t} = \frac{\upsilon}{2}.$$

2) Пусть S – площадь поршня. Из закона Бойля-Мариотта

$$\left(p_0 lS = \left(p_0 + \rho g\upsilon\Delta t\right)HS\right)$$

найдем высоту H столба воздуха в левом сосуде:

$$H = \frac{l}{1 + \dfrac{\rho g\upsilon t}{p_0}} = \frac{l}{1 + \dfrac{\upsilon t}{2l}}.$$

Здесь t – время поступления жидкости в левый сосуд. Тогда поверхность жидкости над поршнем находится на высоте z от дна сосуда.

$$z(t)=\left(l-h\right)+H+\upsilon t=l-\frac{\upsilon t}{2}+\frac{l}{1+\dfrac{\rho g\upsilon t}{p_0}}+\upsilon t=l+\frac{\upsilon t}{2}+\frac{l}{1+\dfrac{\upsilon t}{2l}}. \qquad (1)$$

При малых t высота

$$z(t)\approx\left(l+\frac{\upsilon t}{2}\right)+\left(l-\frac{\upsilon t}{2}\right)=2l\ ,$$

то есть в начале процесса скорость изменения высоты поверхности жидкости близка к нулю.

3а) Из формулы (1) следует. Что при t = 600 с искомая высота z = 22,25 см.

3б) Формальная подстановка даёт, что через t = 1 100 с в левом цилиндре под поршнем уровень жидкости опустится на $h=\dfrac{\upsilon t}{2}=11$ см. Но, это больше l. Следовательно, к этому времени вся вода из под поршня перетечет в правую часть, а воздух под поршнем "пробулькнет" и поршень опустится на дно.

Тогда высота поверхности жидкости над поршнем окажется $z=\upsilon t=22$ см.

Критерии оценивания

1) Условие гидростатического равновесия	**2 балл**
2) Дан ответ к пункту 1 – (формула + число) **0.5 + 0.5 балла**	**1 балл**
3) Записан закон Бойля-Мариотта	**1 балл**
4) Получено выражение для высоты поверхности жидкости от времени	**2 балла**
5) Дан ответ к пункту 2	**1 балл**
6) Дан ответ к пункту 3а)	**1 балл**
7) Указано, что воздух "пробулькивает" и поршень опускается на дно	**1 балл**
8) Дан ответ к пункту 3б)	**1 балл**

Задача 2. Стеклоподъёмники. При включении электродвигателя стеклоподъемника одной двери автомобиля стекло поднимается из нижнего в верхнее положение за время t_1. Если включить одновременно два стеклоподъемника, то стекла поднимутся за время t_2 $(t_2 > t_1)$.

1) За какое время t_3 поднимутся три стекла автомобиля при одновременной работе трёх стеклоподъёмников?

2) За какое время t_4 поднимутся все четыре стекла автомобиля при одновременной работе всех четырёх стеклоподъёмников.

Примечания. Считайте, что сила, необходимая для подъёма стекла, не зависит от скорости подъёма, а сила тяги F мотора стеклоподъёмника пропорциональна силе тока, идущего через него.

Решение (Гуденко А., Кармазин С.). Закон сохранения энергии при работе одного стеклоподъёмника:

$$IU = I^2(r+R) + sF/t_1.$$

Здесь U – ЭДС аккумулятора, r – его внутреннее сопротивление, R – сопротивление обмотки электродвигателя, I – сила тока, необходимая для равномерного подъёма стекла и создающая необходимую силу тяги $F = \beta I$, β – коэффициент пропорциональности, s – перемещение стекла при подъёме.

При работе двух стеклоподъёмников сила тока, текущего через аккумулятор, в два раза больше и закон сохранения энергии выглядит так:

$$2IU = (2I)^2(r + R/2) + 2sF/t_2.$$

Для трёх стеклоподъёмников:

$$3IU = (3I)^2(r + R/3) + 3sF/t_2.$$

Для четырёх стеклоподъемников:

$$4IU = (4I)^2(r + R/4) + 4sF/t_2.$$

Из первых трёх уравнений получаем: $\frac{1}{t_3} - \frac{1}{t_2} = \frac{1}{t_2} - \frac{1}{t_1}$,

Откуда получаем $t_3 = \frac{t_1 t_2}{2t_1 - t_2}$.

Аналогично: $t_4 = \frac{t_1 t_2}{3t_1 - 2t_2}$.

Из уравнений видно, что при идеальном аккумуляторе (r = 0), все четыре уравнения выглядят одинаково и, соответственно, все времена подъёма также одинаковы.

18 января, на портале **http://abitu.net/vseros** *будет проведён онлайн-разбор решений задач теоретического тура. Начало разбора (по московскому времени): 7 класс – 11.00; 8 класс – 12.00; 9 класс – 13.00; 10 класс – 14.30; 11 класс – 16.00.*

Для участия в разборе необходимо зарегистрироваться на портале **http://abitu.net/vseros**

Критерии оценивания

1. Записано уравнение закона сохранения энергии при подъеме одного стекла — **2 балла**
2. Записано уравнение закона сохранения энергии при подъеме двух стекол — **1 балл**
3. Записано уравнение закона сохранения энергии при подъеме трёх стекол — **1 балл**
4. Записано уравнение закона сохранения энергии при подъеме четырёх стекол — **1 балл**
5. Получена связь на времена t_1, t_2, t_3 — **1,5 балла**
6. Получена связь на времена t_1, t_2, t_4 — **1,5 балла**
7. Найдено время t_3 — **1 балл**
8. Найдено время t_4 — **1 балл**

Задача 3. Зарядка-разрядка. В электрической цепи (рис. 1) все элементы можно считать идеальными. Конденсатор емкостью C не заряжен. ЭДС батареи задана. Ключ K замыкают, а затем размыкают в тот момент, когда скорость изменения энергии, запасённой в конденсаторе, составляет 75% от максимальной.

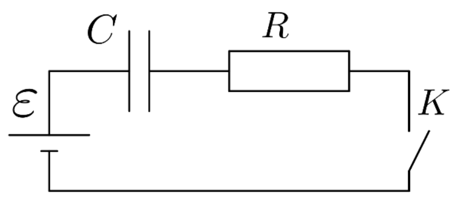

Рис. 1

Найдите количество теплоты, выделившееся в цепи при замкнутом ключе.

Возможное решение (Шеронов А.). Скорость изменения энергии конденсатора:

$$P = \frac{d}{dt}\left(\frac{q^2}{2C}\right) = \frac{q}{C}\frac{dq}{dt} = \frac{q}{C} I. \qquad (1)$$

Здесь I – сила тока в цепи, q – заряд на конденсаторе.

Запишем закон Ома для цепи:

$$\mathcal{E} = IR + \frac{q}{C}. \qquad (2)$$

Работа батареи идёт на зарядку конденсатора и на тепловые потери на резисторе:

$$\mathcal{E} I = P + I^2 R. \qquad (3)$$

Максимум мощности достигается при силе тока $I = \dfrac{\mathcal{E}}{2R}$.

Из уравнения (2) найдём заряд на емкости:

$$q = C\left(\mathcal{E} - \frac{\mathcal{E}}{2R}R\right) = \frac{C\mathcal{E}}{2}.$$

Из (1) найдём максимальную скорость изменения энергии:

$$P_{\max} = \frac{\mathcal{E}^2}{4R}. \qquad (4)$$

По условию в момент размыкания ключа $P = \dfrac{3}{16}\dfrac{\mathcal{E}^2}{R}$. (5)

Подставляя это выражение в уравнение (3) получим:

$$I^2 - \frac{\mathcal{E}}{R} I + \frac{3}{16}\left(\frac{\mathcal{E}}{R}\right)^2 = 0.$$

Решая это квадратное уравнение найдём:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{2R} \pm \sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{\mathcal{E}}{R}\right)^2 - \frac{3}{16}\left(\frac{\mathcal{E}}{R}\right)^2} = \frac{\mathcal{E}}{2R} \pm \frac{\mathcal{E}}{4R}.$$

18 января, на портале **http://abitu.net/vseros** *будет проведён онлайн-разбор решений задач теоретического тура. Начало разбора (по московскому времени): 7 класс – 11.00; 8 класс – 12.00; 9 класс – 13.00; 10 класс – 14.30; 11 класс – 16.00.*
Для участия в разборе необходимо зарегистрироваться на портале **http://abitu.net/vseros**

$$I_1 = \frac{\mathcal{E}}{4R}; \quad I_2 = \frac{3\mathcal{E}}{4R}.$$

Из уравнения (2) найдём соответствующие заряды:

$$q_1 = \frac{3C\mathcal{E}}{4}; \quad q_1 = \frac{C\mathcal{E}}{4}.$$

Джоулево тепло, выделившееся на резисторе равно:

$$W = \left(q\mathcal{E} - \frac{q^2}{2C}\right).$$

Соответственно,

$$W_1 = \frac{24}{32}C\mathcal{E}^2 - \frac{9}{32}C\mathcal{E}^2 = \frac{15}{32}C\mathcal{E}^2; \quad W_1 = \frac{8}{32}C\mathcal{E}^2 - \frac{1}{32}C\mathcal{E}^2 = \frac{7}{32}C\mathcal{E}^2.$$

Таким образом, задача имеет два решения:

$$W_1 = \frac{15}{32}C\mathcal{E}^2; \quad W_2 = \frac{7}{32}C\mathcal{E}^2.$$

Критерии оценивания

1) Получена скорость изменения энергии конденсатора (1)	**1 балл**
2) Записан закон Ома для цепи (2)	**1 балл**
3) Найдена максимальная скорость изменения энергии конденсатора (4)	**1 балл**
4) Найдена мощность в момент размыкания ключа (5)	**1 балл**
5) Получено квадратное уравнение для соответствующей силы тока	**2 балла**
6) Найдены заряды на конденсаторе, при которых в цепи выделяется соответствующая теплота (решено квадратное уравнение)	**2 балла**
7) Найдено соответствующее количество теплоты (рассмотрен любой случай из двух)	**2 балла**

Задача 4. Долго ли умеючи? В глубинах вселенной вдали от всех тяготеющих масс находится тонкий однородный стержень длины L = 10 м и массой M = 1,0 кг. По нему без трения может скользить бусинка массой m = 0,1 кг. В начальный момент бусинка слегка смещена относительно центра стержня и система неподвижна. Через какое время τ бусинка впервые достигнет середины стержня? Гравитационная постоянная $G = 6{,}67\cdot10^{-11}$ Н·м^2/кг^2.

Решение (Плис В.). В процессе колебаний центр масс системы тел будет оставаться неподвижным. Начало лабораторной системы отсчета OX поместим в центр масс. Подвижную систему отсчета OX_1 свяжем со спицей. В ЛСО ускорение бусинки при малом ее смещении x_1 относительно спицы определяется силой притяжения концевого отрезка спицы длиной $2x_1$ и расположенного на расстоянии $\approx L/2$ от бусинки:

$$a_{m,C} = \frac{F_x}{m} = -\frac{Gm(M/L)2x_1}{m(L/2)^2} = -\frac{8GM}{L^3}x_1.$$

Ускорение стержня при этом смещении бусинки

$$a_{M,C} = -\frac{F_x}{M} = \frac{Gm(M/L)2x_1}{M(L/2)^2} = \frac{8Gm}{L^3}x_1.$$

Тогда ускорение a_m бусинки относительно стержня будет равно

$$a_m = a_{m,C} - a_{M,C} = -\frac{8G(M+m)}{L^3}x_1.$$

Получено уравнение гармонических колебаний бусинки относительно спицы. Период этих колебаний

$$T = 2\pi/\omega = \pi L\sqrt{\frac{L}{2G(M+m)}}\ .$$

Искомое время равно четверти периода гармонических колебаний

$$\tau = T/4 \approx 2{,}0\cdot10^6\,\text{с} \approx 24\ \text{суток}.$$

Решение (Гуденко А.). Известно, что период колебаний двух грузов m и M, связанной пружинкой с жёсткостью k, определяется точно также, как для одного грузика на пружинке, но только вместо массы груза нужно взять приведённую массу $\mu = \dfrac{mM}{m+M}$ (это выражение можно получить из уравнений движения).

Период колебаний груза на пружине равен $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{\mu}{k}}$.

В нашем случае «коэффициент жёсткости» $k = \dfrac{8GmM}{L^3}$.

Тогда период колебаний $T = \pi L \sqrt{\dfrac{L}{2G(M+m)}}$.

18 января, на портале **http://abitu.net/vseros** *будет проведён онлайн-разбор решений задач теоретического тура. Начало разбора (по московскому времени): 7 класс – 11.00; 8 класс – 12.00; 9 класс – 13.00; 10 класс – 14.30; 11 класс – 16.00.*
Для участия в разборе необходимо зарегистрироваться на портале **http://abitu.net/vseros**

Критерии оценивания

1) Отмечено, что при смещении бусинки на x_1 сила притяжения определяется взаимодействием бусинки и части спицы длиной $2x_1$ **1 балл**
2) Применён вторые законы Ньютона (по 2 балла за каждый из случаев (для бусинки и для стержня) **4 балла**
3) Получено ускорение бусинки относительно стержня **1 балл**
4) Получено выражение для периода колебаний **2 балл**
5) Получен численный ответ **2 балла**

Если явно указано, что ускорением стержня можно пренебречь в силу $m << M$, то снимается 1 балл.

Задача 5. Толстая линза. Вся поверхность плоского экрана, представляющего собой матовое стекло, освещается параллельным пучком лучей, направленным перпендикулярно экрану. Толстую линзу в виде половинки стеклянного шара расположили **перед** экраном так, что плоская поверхность линзы параллельна плоскости экрана (рис. 1). Показатель преломления стекла линзы $n = 2{,}0$. Диаметр линзы меньше размеров экрана.

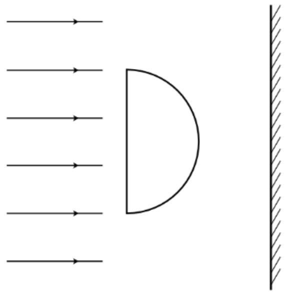

Рис. 1

1) Определите расстояние L_1 от плоской поверхности линзы до экрана, если на экране наблюдается картина (рис. 2). Здесь пунктирные линии касаются внешней границы области с переменной освещённостью.
2) Определите расстояние L_2 от плоской поверхности линзы до экрана, если на экране наблюдается картина (рис. 3).

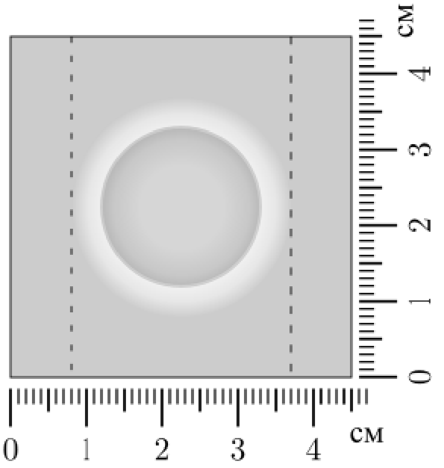

Рис. 2

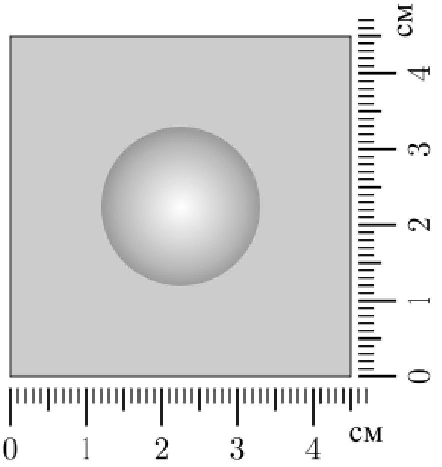

Рис. 3

Возможное решение (Варламов С., Карманов М.). Рассмотрим ход лучей в линзе. Плоскую границу линзы все лучи проходят без преломления. А вот из сферической поверхности выходят не все лучи. Часть из них испытывает полное отражение. Найдем предельный угол падения, при котором лучи перестают выходить за сферическую поверхность: $n\sin\alpha_{\text{пр}} = 1{,}0$. Отсюда $\alpha_{\text{пр}} = 30^\circ$.

Построим ход некоторых лучей. Из данной картинки (рис. 4) понятно, почему в первом случае мы наблюдаем на экране кольцо более яркое, чем вся поверхность экрана. Это кольцо создается как лучами, прошедшими мимо линзы, так и некоторыми лучами, прошедшими сквозь неё. При этом внешняя граница яркого кольца определяется как раз лучом, падающим на сферическую поверхность под предельным углом

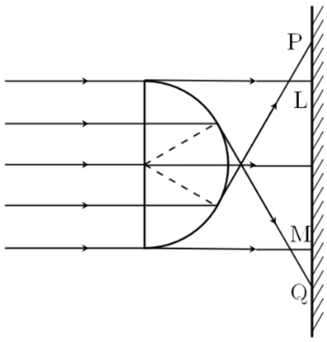

Рис. 4

в 30°.

Диаметр же темного центрального пятна равен диаметру линзы. Определим с помощью масштабной линейки внешний диаметр кольца D = 2,90 см и диаметр внутреннего темного круга d = 2,10 см.

Рассмотрим предельный луч.

Отмеченный угол равен 30°, $CD = \dfrac{d}{2} = R = 1{,}05$ см (рис. 5).

$$CE = \frac{D}{2} = 1{,}45 \text{ см.}$$

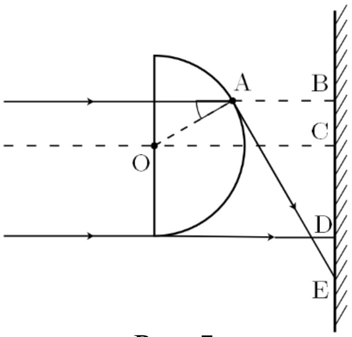

Рис. 5

Пусть L – искомое расстояние, тогда $AB = L - R\cos\alpha_{\text{пр}}$.

$$BE = \frac{D}{2} + R\sin\alpha_{\text{пр}}.$$

$$\frac{AB}{BE} = \operatorname{tg}\alpha_{\text{пр}}.$$

В результате преобразований получим $L_1 = \dfrac{\dfrac{D}{2}\sin\alpha_{\text{пр}} + R}{\cos\alpha_{\text{пр}}} = 2{,}05$ см.

Во втором случае точки D и E должны совпасть, либо точка E должна располагаться ближе к точке C. Тогда $D \le d$ = 2,10 см. Поскольку придвинуть линзу к экрану ближе, чем на расстояние $R = d/2$, невозможно, то

$$R \le L_2 \le R\frac{\sin\alpha_{\text{пр}} + 1}{\cos\alpha_{\text{пр}}} \quad \text{или} \quad 1{,}05 \text{ см} \le L_2 \le 1{,}82 \text{ см.}$$

Критерии оценивания

1)	Понимание наличия полного внутреннего отражения для части лучей	**1 балл**
2)	Определен предельный угол в 30 градусов	**1 балл**
3)	Рисунок с ходом лучей, поясняющий образование на экране первой картинки.	**2 балла**
4)	Показано, что диаметр темного пятна равен диаметру полушара.	**1 балл**
5)	Записаны геометрические связи, позволяющие получить ответ.	**1 балл**
6)	Получена формула для L в первом случае	**1 балл**
7)	Верный численный ответ в первом случае	**1 балл**
8)	Верный переход ко второму случаю	**1 балл**
9)	Верный численный ответ (граничное значение или диапазон возможных значений для L) во втором случае	**1 балл**

18 января, на портале **http://abitu.net/vseros** *будет проведён онлайн-разбор решений задач теоретического тура. Начало разбора (по московскому времени): 7 класс – 11.00; 8 класс – 12.00; 9 класс – 13.00; 10 класс – 14.30; 11 класс – 16.00.*

Для участия в разборе необходимо зарегистрироваться на портале **http://abitu.net/vseros**