

11 класс

Второй день

- 11.5. Олег нарисовал пустую таблицу 50×50 и написал сверху от каждого столбца и слева от каждой строки по числу. Оказалось, что все 100 написанных чисел различны, причём 50 из них рациональные, а остальные 50 — иррациональные. Затем в каждую клетку таблицы он записал произведение чисел, написанных около её строки и её столбца («таблица умножения»). Какое наибольшее количество произведений в этой таблице могли оказаться рациональными числами?
- 11.6. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность Γ с центром в точке O . Его диагонали AC и BD перпендикулярны и пересекаются в точке P , причём точка O лежит внутри треугольника BPC . На отрезке BO выбрана точка H так, что $\angle BHP = 90^\circ$. Окружность ω , описанная около треугольника PHD , вторично пересекает отрезок PC в точке Q . Докажите, что $AP = CQ$.
- 11.7. На плоскости проведено несколько прямых, никакие две из которых не параллельны и никакие три не проходят через одну точку. Докажите, что в областях, на которые прямые поделили плоскость, можно расставить положительные числа так, чтобы суммы чисел по обе стороны относительно любой из проведённых прямых были равны.
- 11.8. Изначально на стол кладут 100 карточек, на каждой из которых записано по натуральному числу; при этом среди них ровно 28 карточек с нечётными числами. Затем каждую минуту проводится следующая процедура. Для каждых 12 карточек, лежащих на столе, вычисляется произведение записанных на них чисел, все эти произведения складываются, и полученное число записывается на новую карточку, которая добавляется к лежащим на столе. Можно ли выбрать исходные 100 чисел так, что для любого натурального d на столе рано или поздно появится карточка с числом, делящимся на 2^d ?

11 класс

Второй день

- 11.5. Олег нарисовал пустую таблицу 50×50 и написал сверху от каждого столбца и слева от каждой строки по числу. Оказалось, что все 100 написанных чисел различны, причём 50 из них рациональные, а остальные 50 — иррациональные. Затем в каждую клетку таблицы он записал произведение чисел, написанных около её строки и её столбца («таблица умножения»). Какое наибольшее количество произведений в этой таблице могли оказаться рациональными числами?
- 11.6. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность Γ с центром в точке O . Его диагонали AC и BD перпендикулярны и пересекаются в точке P , причём точка O лежит внутри треугольника BPC . На отрезке BO выбрана точка H так, что $\angle BHP = 90^\circ$. Окружность ω , описанная около треугольника PHD , вторично пересекает отрезок PC в точке Q . Докажите, что $AP = CQ$.
- 11.7. На плоскости проведено несколько прямых, никакие две из которых не параллельны и никакие три не проходят через одну точку. Докажите, что в областях, на которые прямые поделили плоскость, можно расставить положительные числа так, чтобы суммы чисел по обе стороны относительно любой из проведённых прямых были равны.
- 11.8. Изначально на стол кладут 100 карточек, на каждой из которых записано по натуральному числу; при этом среди них ровно 28 карточек с нечётными числами. Затем каждую минуту проводится следующая процедура. Для каждых 12 карточек, лежащих на столе, вычисляется произведение записанных на них чисел, все эти произведения складываются, и полученное число записывается на новую карточку, которая добавляется к лежащим на столе. Можно ли выбрать исходные 100 чисел так, что для любого натурального d на столе рано или поздно появится карточка с числом, делящимся на 2^d ?