10 класс

10.1. В произведении пяти натуральных чисел каждый сомножитель уменьшили на 3. Могло ли произведение при этом увеличиться ровно в 15 раз? (*Н. Агаханов, И. Богданов*)

Ответ. Да, могло.

Решение. В качестве примера подходит произведение $1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 48$. После указанной операции получается

$$(-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot 45 = 720 = 15 \cdot 48.$$

Замечание. Приведённый пример — единственный. Укажем, как его придумать. Предположим, что четыре из сомножителей равнялись 1, а пятый — a. Их произведение было равно a, а после уменьшения превратилось в $(-2)^4(a-3) = 16a-48$. Значит, при $16a-48 = 15a$ условие соблюдается. Решая это уравнение, получаем $a = 48$.

Комментарий. Только верный ответ — 0 баллов.

Предъявлен набор чисел, удовлетворяющий условию — 7 баллов.

Во в целом правильном решении из-за арифметической ошибки получен в качестве ответа набор 1, 1, 1, 1, a, где значение a ошибочно — 5 баллов.

10.2. Окружность с центром в точке I вписана в четырёхугольник $ABCD$. Лучи BA и CD пересекаются в точке P, а лучи AD и BC пересекаются в точке Q. Известно, что точка P лежит на окружности ω, описанной около треугольника AIC. Докажите, что точка Q тоже лежит на окружности ω. (*А. Кузнецов*)

Решение. Так как четырёхугольник $AICP$ вписанный, то $\angle PCI = 180^\circ - \angle PAI = \angle BAI$; иначе говоря, $\angle DCI = \angle BAI$ (см. рис. 4). Центр I вписанной окружности четырёхугольника лежит на биссектрисах его углов, поэтому $\angle DCI = \angle BCI$ и $\angle DAI = \angle BAI$. Отсюда следует, что $\angle DAI = \angle BCI$, а значит, $\angle QAI = \angle BCI = 180^\circ - \angle QCI$.

Из полученного равенства вытекает, что четырёхугольник $AICQ$ вписанный. Тем самым, точка Q лежит на окружности ω (проходящей через точки A, I и C).

Комментарий. Доказано только, что $\angle DAI = \angle DCI = \angle BAI = \angle BCI$ или что $\angle BAD = \angle BCD$ — 3 балла.

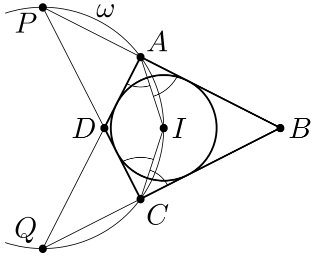

Рис. 4

(Только за доказательство равенства $\angle DCI = \angle BAI$ баллы не начисляются.)

Доказано, что четырёхугольник $ABCD$ симметричен относительно BD — не менее 5 баллов.

(За утверждение о том, что $ABCD$ симметричен относительно BD, без доказательства или с неправильным доказательством баллы не начисляются.)

10.3. Паша выбрал 2017 (не обязательно различных) натуральных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{2017}$ и играет сам с собой в следующую игру. Изначально у него есть неограниченный запас камней и 2017 больших пустых коробок. За один ход Паша добавляет в любую коробку (по своему выбору) a_1 камней, в любую из оставшихся коробок (по своему выбору) — a_2 камней, $\ldots$, наконец, в оставшуюся коробку — a_{2017} камней. Пашина цель — добиться того, чтобы после некоторого хода во всех коробках стало поровну камней. Мог ли он выбрать числа так, чтобы цели можно было добиться за 43 хода, но нельзя — за меньшее ненулевое число ходов? *(И. Богданов)*

Ответ. Да, мог.

Решение. Заметим, что $2017 = 43 \cdot 46 + 39$. Приведём пример Пашиных чисел, при которых требуемое выполняется. Пусть среди его чисел будут 39 двоек, 46 чисел, равных 44, а остальные — единицы.

Чтобы добиться требуемого за 43 хода, Паша выбирает 39 коробок, в которые он всегда кладёт по 2 камня — через 43 хода в них окажется по $43 \cdot 2 = 86$ камней. Остальные коробки он разбивает на 43 группы по 46 коробок; на i-м ходу он положит по 44 камня во все коробки i-й группы и по одному камню — в коробки остальных групп. Тогда через 43 хода в каждой коробке каждой группы будет по $44 + 42 \cdot 1 = 86$ камней, то есть во всех коробках будет поровну камней.

Осталось доказать, что за меньшее число ходов требуемое невыполнимо. Пусть Паша сделал $k < 43$ ходов. Тогда в какую-то коробку A попало 44 камня на одном ходу, и в ней будет не меньше, чем $44 + (k-1) \cdot 1 = 43 + k$ камней. С другой стороны, поскольку $46k < 2017$, в какую-то коробку B ни на одном из ходов не попадёт 44 камня, то есть в ней будет не больше $2k$ камней. Поскольку $k < 43$, имеем $2k < k + 43$, а значит, в коробке B меньше камней, чем в A. Таким образом, Паша ещё не добился требуемого.

Замечание. Приведённый пример — не единственный. Например, подойдёт также набор чисел, состоящий из 42 единиц, $2017 - 43 = 1974$ чисел, равных $a > 1$, и одного числа, равного $43a - 42$. Существуют даже примеры с попарно различными числами; однако проверка того, что они подходят, несколько труднее, чем для примеров, приведённых выше.

Комментарий. Только верный ответ — 0 баллов.

Только предъявлен верный пример набора чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{2017}$ — 3 балла.

Предъявлен верный пример набора чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{2017}$ и проверено, что можно уравнять количества камней в коробках за 43 хода (но нет доказательства того, что невозможно уравнять менее чем за 43 хода) — 4 балла.

Предъявлен верный пример набора чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{2017}$ и доказано, что невозможно уравнять количества камней в коробках менее чем за 43 хода (без проверки того, что можно уравнять за 43 хода) — 5 баллов.

(Вышеупомянутые баллы могут быть снижены, если проверка оставшегося недоказанным утверждения затруднительна.)

Только идея конструирования нужного набора $a_1, a_2, \ldots, a_{2017}$ с несколькими «большими» a_i (создающими препятствия для уравнивания за малое число ходов) — 1 балл.

10.4. Учитель собирается дать детям задачу следующего вида. Он сообщит им, что он задумал многочлен $P(x)$ степени 2017 с целыми коэффициентами, старший коэффициент которого равен 1. Затем он сообщит им k целых чисел n_1, n_2, $\ldots$, n_k, и отдельно сообщит значение выражения $P(n_1)\cdot P(n_2)\cdot\ldots\cdot P(n_k)$. По этим данным дети должны найти многочлен, который мог бы задумать учитель. При каком наименьшем k учитель сможет составить задачу такого вида так, чтобы многочлен, найденный детьми, обязательно совпал бы с задуманным? *(Г. Жуков)*

Ответ. При $k = 2017$.

Решение. Сначала докажем, что $k > 2016$. Пусть учитель использовал некоторое $k \leqslant 2016$, задумав многочлен $P(x)$. Рассмотрим многочлен $Q(x) = P(x) + (x - n_1)(x - n_2)\ldots(x - n_k)$. Заметим, что степень многочлена $Q(x)$ также равна 2017, а его старший коэффициент также равен 1. При этом $P(n_1)P(n_2)\ldots P(n_k) = Q(n_1)Q(n_2)\ldots Q(n_k)$, но $P(x) \neq Q(x)$. Значит, дети могли бы найти многочлен $Q(x)$ вместо $P(x)$, то есть учитель не добился требуемого.

Осталось доказать, что при $k = 2017$ учитель сможет придумать требуемую задачу.

Лемма. *Пусть $P(x)$ — многочлен с целыми коэффициентами, и пусть a и b — различные целые числа. Тогда $P(a) - P(b)$ делится на $a - b$.*

Доказательство. В разности $P(a)-P(b)$ сгруппируем слагаемые по степеням: если $P(x) = p_n x^n + p_{n-1}x^{n-1} + \ldots + p_1 x + p_0$, то $P(a)-P(b) = p_n(a^n - b^n) + p_{n-1}(a^{n-1} - b^{n-1}) + \ldots + p_1(a - b)$, где каждое слагаемое делится на $a - b$. $\square$

Пусть $k = 2017$. Положим $n_i = 4i$ при $i = 1, 2, \ldots, k$; пусть учитель сообщит детям, что $P(n_1)P(n_2)\ldots P(n_k) = 1$. Тогда многочлен $P(x) = (x-n_1)(x-n_2)\ldots(x-n_k)+1$ под условие подходит. Предположим, что ещё какой-то многочлен $Q(x)$ также подходит под условие. Тогда, так как $Q(n_1)Q(n_2)\ldots Q(n_k) = 1$ и коэффициенты многочлена $Q(x)$ — целые числа, то $Q(n_i) = \pm 1$ при любом $i = 1, 2, \ldots, k$.

Если найдутся i и j такие, что $Q(n_i) = 1$, а $Q(n_j) = -1$, то разность $Q(n_i) - Q(n_j) = 2$ не делится на $n_i - n_j$, что противоречит лемме. Поэтому все значения $Q(n_i)$ равны между собой и все равны либо 1, либо -1. Однако все значения не могут быть равны -1, так как в произведении $Q(n_1)Q(n_2)\ldots Q(n_k)$

множителей нечетное количество и произведение было бы равно -1. Значит, $Q(n_i) = 1$ при любом $i = 1, 2, \ldots, k$. Тогда разность $P(x) - Q(x)$ — многочлен степени менее k, имеющий хотя бы k корней, то есть этот многочлен тождественно равен 0, и $P(x) = Q(x)$. Противоречие.

Замечание. С использованием леммы можно показать, что многочлен $P(x) = (x - n_1)(x - n_2)\ldots(x - n_{2017}) \pm 1$ подходит при *любых* различных целых числах n_1, n_2, $\ldots$, n_{2017}.

Комментарий. Только верный ответ — 0 баллов.

Полное решение задачи состоит из двух частей:

(*а*) доказательство того, что требуемого нельзя добиться при $k \leqslant 2016$ — оценивается из 2 баллов;

(*б*) доказательство того что при $k = 2017$ требуемого добиться можно — оценивается из 5 баллов.

Если в части (*б*) предъявлен многочлен $P(x) = (x-n_1)(x-n_2)\ldots(x - n_k) \pm 1$ (при некоторых различных целых n_1, n_2, $\ldots$, n_k), но не доказано, что никакой другой многочлен $Q(x)$ не удовлетворяет условию — 2 балла (из пяти).

За использование леммы о делимости $P(a) - P(b)$ на $a - b$ без доказательства баллы не снимаются.