10 класс

1. Условие. Первичное кольцо радуги образуется каплями воды, преломляющими свет Солнца под углом 138° по отношению к изначальному направлению распространения излучения. На каких широтах на Земле первичная радуга никогда не может быть видна на небе в истинный солнечный полдень? Рельефом Земли, рефракцией, угловыми размерами Солнца и толщиной радуги пренебречь. Считать, что климатические условия позволяют радуге появляться в любом месте Земли в любой сезон года.

1. Решение. Угол преломления света каплей воды больше 90°, поэтому радуга появляется на небе в области, противоположной Солнцу. Она выглядит как кольцо с центром в противоположной точке и радиусом

$$\gamma = 180° - 138° = 42°.$$

Если в истинный солнечный полдень высота Солнца над горизонтом выше угла γ, то противоположная точка неба окажется глубоко под горизонтом, и первое кольцо радуги не будет видно на небе. Чтобы данное условие выполнялось в любой сезон года, нужно, чтобы верхняя кульминация Солнца происходила выше даже в день зимнего солнцестояния для данного полушария. В северном полушарии высота Солнца над горизонтом в полдень 22 декабря составляет

$$h = 90° - \varphi - \varepsilon,$$

где φ – широта места (положительная), а ε – угол наклона экватора к эклиптике (около 23°). Чтобы выполнилось условие $h > \gamma$, широта должна быть

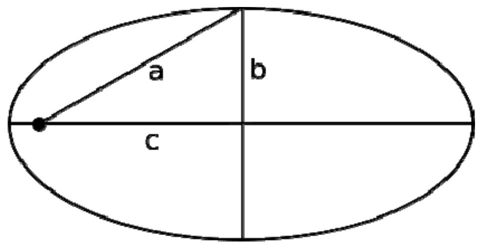
$$\varphi < 90° - \gamma - \varepsilon = +25°.$$

Аналогично, для южного полушария и дня 21 июня мы получаем $\varphi > -25°$. Итак, условие задачи выполняется для пояса Земли, расположенного между параллелями с широтой ±25°.

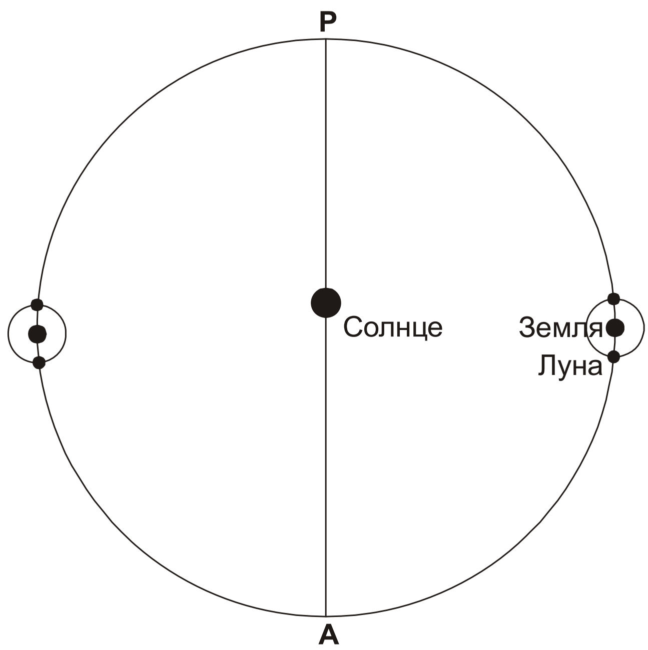
1. Система оценивания. Начальным этапом решения является указание расположения радуги на небе как кольца с радиусом 42° вокруг противосолнечной точки неба (или кольца с радиусом 138° вокруг Солнца). Данный этап оценивается в 2 балла. Формулировка условия видимости верхнего края радуги на небе (высота Солнца менее 42°) оценивается в 2 балла. Вывод о выполнении условия задачи в каждом из двух полушарий оценивается по 2 балла (всего – 4 балла). Участники олимпиады могут пользоваться более точным значением угла ε (23.4° или 23.5°) с итоговым ответом 24.5° или 24.6°, что не обязательно, но и не является ошибкой.

2. Условие. В некоторый момент времени и Земля, и Луна находятся на расстоянии 1.0000 а.е. от центра Солнца. В каком созвездии видна Луна земному наблюдателю?

2. Решение. Как известно, орбита Земли слегка вытянута, а 1 а.е. есть среднее расстояние от Солнца до Земли (большая полуось орбиты). Согласно определению, эллипс – это геометрическое место точек с постоянной суммой расстояний от двух фокусов. Отсюда можно сделать вывод, что на среднем расстоянии от Солнца Земля будет находиться тогда, когда попадет в одну из вершин на малой оси эллипса (вертикальной линии на рисунке)



Так как эксцентриситет орбиты нашей планеты невелик, мы можем считать, что Земля оказывается на таком расстоянии от Солнца посередине временных интервалов между прохождением точек перигелия (P) и афелия (A) – в начале апреля и начале октября. Коль скоро Луна также располагается в 1.0000 а.е. от Солнца, угол «Солнце-Земля-Луна» должен составлять 90° (см. рисунок). Здесь мы учитываем, что расстояние между Землей и Луной несравнимо меньше расстояния от Земли до Солнца.



Мы делаем вывод, что ситуация наступает в фазе первой или последней четверти в начале апреля или начале октября. Во всех случаях направление от Земли к Луне параллельно линии апсид орбиты Земли (линии, соединяющей точки перигелия и афелия). Луна располагается в области неба, где находится Солнце в перигелии (начало января) или афелии (начало июля). Это созвездия Стрельца или Близнецов.

2. Система оценивания. Первым этапом задачи является указание, в каких точках своей орбиты должна находиться Земля. Этот вывод оценивается в 2 балла. Далее участники должны установить, где может располагаться Луна и каким будет направление от Земли к

Луне относительно эклиптики или линии апсид орбиты Земли. Этот вывод оценивается еще в 2 балла. Наконец, правильное указание каждого из двух созвездий оценивается еще по 2 балла. Если участник олимпиады путает зодиакальные созвездия со знаками и указывает в ответе Козерог и Рак, баллы за созвездия не выставляются, и максимальная оценка составляет 4 балла.

Если участник олимпиады не учитывает эксцентриситет орбиты Земли, считает, что она всегда находится на расстоянии 1.0000 а.е. от Солнца, и делает вывод, что Луна может находиться в любом из 13 созвездий на эклиптике, то за такое решение выставляется 2 балла.

3. Условие. Ученые будущего предложили фантастический проект, в ходе которого весь грунт на поверхности Марса электрохимическим способом был бы разложен на свободные металл и кислород, и таким образом была бы создана кислородная атмосфера на планете. Какова толщина слоя грунта, который нужно переработать, чтобы давление такой кислородной атмосферы у поверхности Марса оказалось таким же, как атмосферное давление у поверхности Земли? Считать, что грунт Марса состоит из минерала лимонита с химической формулой Fe_2O_3 и плотностью 3.5 г/см^3. Атомные веса железа и кислорода составляют 56 и 16 соответственно.

3. Решение. Атмосферное давление у поверхности Земли p составляет 10^5 Па и равно весу столба атмосферы площадью 1 м^2. Все то же самое будет относиться и к Марсу, но нельзя забывать, что ускорение свободного падения g на Марсе другое. Масса этого столба с площадью основания 1 м^2 составит:

$$m_\mathrm{S} = \frac{p}{g} = \frac{pR^2}{GM}.$$

Здесь M и R – масса и радиус Марса. Данное выражение можно получить другим, более сложным способом. Концентрация атомов в атмосфере у поверхности Марса равна

$$n = \frac{p}{kT}.$$

Здесь k – постоянная Больцмана, T – температура атмосферы. Число атомов в столбе атмосферы единичной площади есть произведение концентрации на высоту однородного столба атмосферы H:

$$n_\mathrm{S} = nH = \frac{p}{kT}\cdot\frac{\Re T}{\mu g} = \frac{N_\mathrm{A} p}{\mu g} = \frac{p}{mg}.$$

Здесь N_A – постоянная Авогадро, μ и m – молярная и молекулярная масса газа. Учитывая, что $m_S = m \cdot n_S$, мы вновь приходим к первой формуле решения задачи.

Масса столба оказывается равной $2.7 \cdot 10^4$ кг/м^2. Обратим внимание, что высота атмосферы и толщина грунта существенно меньше радиуса планеты, ускорение свободного падения мы считаем постоянным. Массовая доля кислорода в молекуле Fe_2O_3 равна

$$\eta = \frac{3A_O}{2A_{Fe} + 3A_O} \approx 0.3.$$

Здесь A_O и A_{Fe} – атомные веса кислорода и железа. Чтобы наполнить столб атмосферы требуемым количеством кислорода, нужно переработать столб грунта Марса той же площади (так как обработке подвергается вся планета) глубиной h. Масса этого столба будет равна

$$m_{GS} = \frac{m_S}{\eta} = m_S \frac{2A_{Fe} + 3A_O}{3A_O}.$$

Масса столба получается равной $9 \cdot 10^4$ кг/м^2. Теперь мы можем найти его глубину

$$h = m_{GS}/\rho = 25 \text{ м}.$$

Здесь ρ – плотность грунта, которую нужно перевести в нужные единицы (при выполнении решения в системе СИ – в кг/м^3).

3. Система оценивания. Существует несколько подходов к решению данного задания. Участники олимпиады могут вычислять требуемую массу кислорода как в расчете на единицу площади (1 м^2 или 1 см^2 в зависимости от используемой системы единиц), так и в расчете на всю поверхность Марса. Правильное определение массы атмосферы на единицу площади в виде формулы или числа оценивается в 3 балла. Эффективным и самым простым методом выполнения этого этапа является представление давления как веса столба атмосферы единичной площади. Участники могут проводить выкладки через величину однородного столба атмосферы и даже пытаться вычислить температуру Марса. Это излишние шаги, но при условии правильности вычислений они оцениваются в полной мере.

Вычисление массы грунта на единичную площадь (или площадь поверхности Марса) оценивается в 2 балла. Если при этом участник олимпиады не учитывает или неправильно учитывает количество атомов кислорода и железа в молекуле Fe_2O_3, данные 2 балла не ставятся, но другие этапы решения оцениваются в полной мере. Наконец, определение глубины переработки грунта оценивается в 3 балла.

4. Условие. Видимая звездная величина звезды Регул равна $+1.4^m$, расстояние до нее 24 пк, масса – 3.5 массы Солнца, период осевого вращения – 16 часов. Исходя из этих данных, найдите минимально возможное значение температуры поверхности Регула.

4. Решение. Определим абсолютную звездную величину Регула:

$$m_A = m + 5 - 5 \lg d = -0.5.$$

Здесь d – расстояние до Регула. С учетом того, что абсолютная звездная величина Солнца равна $+4.7^m$, получаем, что светимость Регула L больше светимости Солнца L_0 в $10^{0.4 \cdot 5.2} = 120$ раз. Для светимостей L, радиусов R и температур T справедливо соотношение (индекс «0» относится к Солнцу):

$$\frac{L}{L_0} = \left(\frac{R}{R_0}\right)^2 \left(\frac{T}{T_0}\right)^4.$$

Отсюда мы получаем выражение для температуры поверхности Регула:

$$T = T_0 \left(\frac{L}{L_0}\right)^{1/4} \left(\frac{R_0}{R}\right)^{1/2}.$$

Нам неизвестен радиус Регула R, но известен период его обращения вокруг своей оси t. Определим, при каком радиусе R физическое тело может вращаться с таким периодом и не быть разорванным центробежными силами. Для этого его скорость на экваторе не должна превышать первую космическую:

$$\frac{2\pi R}{t} < \sqrt{\frac{GM}{R}}.$$

Здесь M – масса звезды. Мы не учитываем здесь вклад тепловой скорости частиц, что будет обосновано далее. Получаем:

$$R < \left(\frac{GMt^2}{4\pi^2}\right)^{1/3} \approx 5R_0.$$

В итоге,

$$T > T_0 \left(\frac{L}{L_0}\right)^{1/4} \left(\frac{4\pi^2 R_0^3}{GMt^2}\right)^{1/6} \sim 1.5T_0 \sim 9000\ \text{K}.$$

Добавим, что при граничном значении температуры (9000 K) мы будем иметь радиус Регула в 5 радиусов Солнца и скорость осевого вращения на экваторе примерно 380 км/с. Это несравнимо больше тепловой скорости атомов водорода, соответствующей данной температуре (10 км/с), что оправдывает допущение, сделанное выше. Реальная температура на экваторе Регула немногим более 10000 K, то есть звезда находится на грани динамической устойчивости.

4. Система оценивания. Для решения задачи участники олимпиады должны получить значение светимости Регула, что оценивается в 2 балла. Выражение температуры Регула в зависимости от его радиуса из закона Стефана-Больцмана оценивается в 2 балла. Определение максимально возможного радиуса Регула исходя из его динамической устойчивости оценивается в 2 балла, еще 2 балла выставляется за вычисление минимальной температуры. Обоснование того, что тепловое движение атомов не влияет на ситуацию, не является обязательным.

Участники олимпиады могут пытаться определить значение радиуса Регула из напрямую из соотношения "радиус-светимость", указывая, что Регул – звезда главной последовательности, после чего найти его температуру. Однако, вследствие неточности соотношения "радиус-светимость" эта температура (около 12000 K) будет даже выше истинной температуры Регула (10000 K) и не может считаться минимально возможной температурой. При условии правильности вычислений подобное решение оценивается в 5 баллов (2 балла за значение светимости Регула, 2 балла за применение закона Стефана-Больцмана и 1 балл за применение соотношения "радиус-светимость").

Возможно решение задания, при котором участник олимпиады будет предполагать, что устойчивость звезды определяется только тепловым движением атомов, забыв про вращение звезды. В этом случае он будет приравнивать тепловую скорость атомов к первой (или даже второй) космической скорости, что приведет его к очень низкой величине минимальной температуры (порядка десятков кельвин). Такое решение может оцениваться не более, чем в 4 балла, при условии правильного вычисления светимости Регула и связи температуры с радиусом и светимостью по закону Стефана-Больцмана.

5. Условие. После обработки всех данных космической обсерватории GAIA будут с достаточной точностью получены параллаксы объектов в двух спутниках нашей Галактики, Большом и Малом Магеллановых облаках. Предполагаемый параллакс Большого Магелланового Облака (БМО) составляет 20 микросекунд дуги. Определите, во сколько раз дальше от нас находится Галактика Андромеды, если расстояние до нее порядка 800 кпк. Возможно ли из данных GAIA определить параллакс туманности Андромеды, если параллакс БМО определен с точностью 10%?

5. Решение. Определим расстояние до Большого Магелланова Облака:

$$D_M\ (\text{пк}) = 1\ /\ \mathrm{p}_M'' = 50000.$$

Здесь p_{M} – параллакс Большого Магелланова облака. Получаем, что галактика Андромеды располагается дальше от нас, и отношение расстояний равно

$$K = D_{\mathrm{A}}/D_{\mathrm{M}} = 16.$$

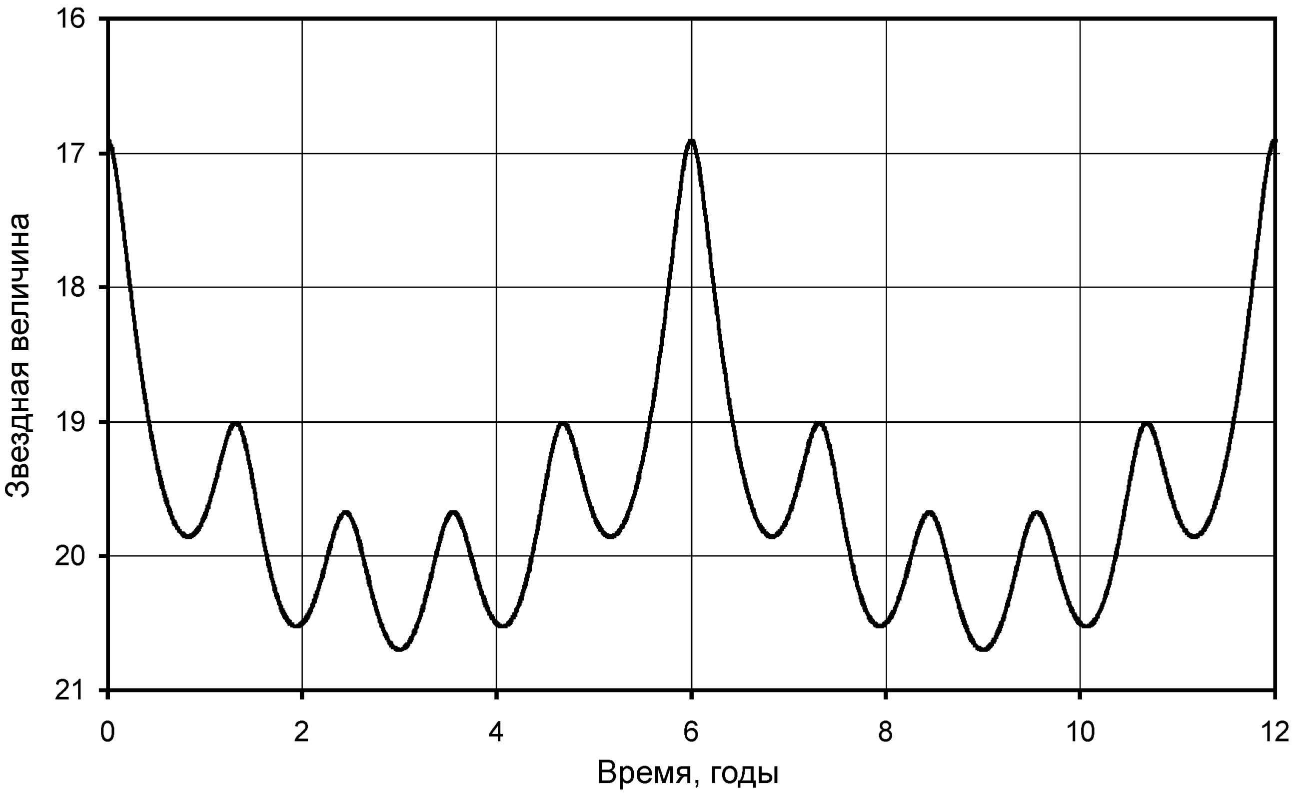
Параллакс галактики Андромеды равен

$$p_{\mathrm{A}}'' = 1/D_{\mathrm{A}}\ (\text{пк}) \sim 1.2\cdot10^{-6}.$$

Эта величина меньше погрешности измерения параллаксов в эксперименте GAIA (10% от параллакса Большого Магелланова облака или 2 микросекунды дуги), поэтому определить параллакс туманности Андромеды не удастся.

5. Система оценивания. Первый этап решения задачи связан с определением отношения расстояний до галактики Андромеды и БМО (через расстояние до БМО или параллакс галактики Андромеды). Этот этап оценивается в 3 балла. Далее необходимо определить точность измерений GAIA (3 балла). Вывод о том, что параллакс галактики Андромеды меньше погрешности измерений оценивается в 2 балла. Эти 2 балла не выставляются, если на предыдущих этапах была допущена арифметическая ошибка.

6. Условие. В ходе космической экспедиции будущего на небольшой астероид была установлена мощная лампа, работающая от стабильного атомного источника энергии. На рисунке показана зависимость звездной величины лампы на Земле от времени. Определите большую полуось и эксцентриситет орбиты астероида. Считать, что орбита лежит в плоскости эклиптики и не заходит внутрь орбиты Земли, астероид не отражает и не затеняет свет лампы, а сама лампа равномерно светит во все стороны и всегда существенно ярче самого астероида. Орбиту Земли считать круговой.



6. Решение. По условию задачи, лампа работает от автономного источника энергии, независимого от условия освещения Солнцем. Звездная величина лампы, регистрируемая на Земле, меняется только вследствие изменения расстояния между Землей и астероидом, на котором установлена лампа.

Чтобы решить задачу наиболее простым способом, обратим внимание, что зависимость звездной величины лампы полностью повторяется через 6 лет. Более того, этот период кратен земному году, то есть периоду обращения Земли вокруг Солнца. По истечении 6 лет Земля оказывается в той же точке орбиты, следовательно, астероид также проходит ту же точку своей орбиты. Следовательно, промежуток времени в 6 лет содержит кратное число периодов обращения астероида вокруг Солнца.

Блеск лампы становится максимальным (звездная величина минимальна) в моменты 0, 6 и 12 лет. В это время профиль кривой блеска симметричен относительно максимума.

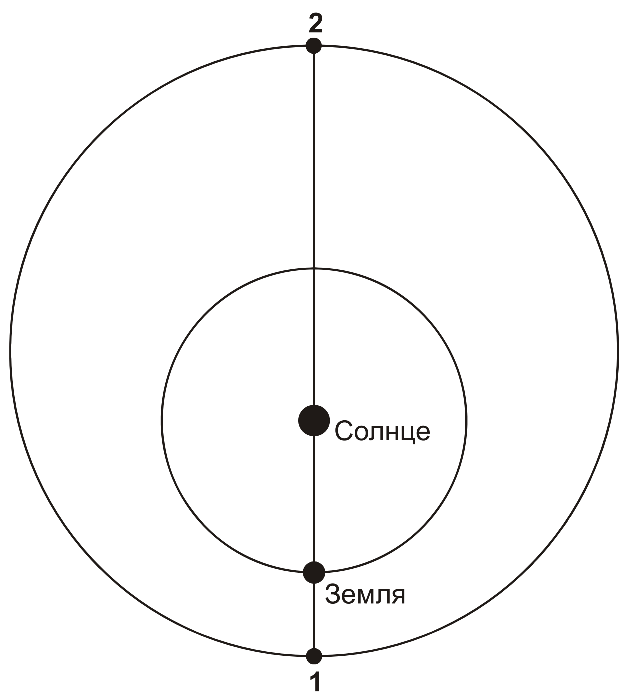
Следовательно, в это же время астероид располагается в точке перигелия орбиты и при этом находится либо в противостоянии, либо в соединении с Солнцем.

Между главными максимумами видно еще по 4 максимума блеска и 5 минимумов между ними. Они вызваны тем, что астероид периодически оказывается в противостоянии с Солнцем, приближаясь к Земле, и в соединении с ним, удаляясь от Земли. Если бы астероид двигался по орбите навстречу Земле (в противоположном направлении), то за 6 лет наблюдалось бы более 6 соединений и противостояний. Наличие 5 минимумов блеска говорит о пяти соединениях за 6-летний период. Следовательно, синодический период астероида S не превышает 1.2 года (в реальности, он точно равен этой величине, как можно убедиться по графику). Учитывая, что астероид находится дальше от Солнца, чем Земля, его орбитальный период T может быть найден по формуле:

$$\frac{1}{S} = \frac{1}{T_0} - \frac{1}{T}.$$

Здесь T_0 – орбитальный период Земли (один год). Период T составляет ровно 6 лет, и астероид движется по орбите в том же направлении, что и Земля. Большая полуось орбиты астероида составляет

$$a = 6^{2/3} = 3.3 \text{ а.е.}$$



На графике видно, что в моменты времени 3 года и 9 лет астероид находится в соединении с Солнцем на максимальном удалении от Земли (положение 2 на рисунке). Наша планета в это время занимает то же положение, что и в моменты времени 0, 6 и 12 лет. Значит, в эти моменты астероид находится в положении 1, в противостоянии с Солнцем (по условию задачи, он не заходит внутрь орбиты Земли). Определим по графику звездные величины лампы в эти два момента:

$$m_1 = 16.9;\ m_2 = 20.7.$$

Отношение видимых яркостей лампы в эти моменты:

$$K = 10^{0.4(m_2 - m_1)} = 33.$$

Пусть r – радиус орбиты Земли, e – эксцентриситет орбиты астероида. Расстояние от Земли до лампы в моменты 1 и 2 равны:

$$d_1 = a\,(1 - e) - r;$$
$$d_2 = a\,(1 + e) + r;$$

Светимость лампы не зависит от ее положения, поэтому

$$K = \frac{d_2^2}{d_1^2};\quad d_2 = d_1\sqrt{K}.$$

Решая эти уравнения относительно e, получаем:

$$e = \frac{\sqrt{K}(a - r) - (a + r)}{a(\sqrt{K} + 1)} = 0.4.$$

6. Система оценивания. Для решения задачи участники должны установить, что астероид обращается по своей орбите с периодом в 6 лет и получить из этого величину большой полуоси его орбиты. Данный этап решения оценивается в 3 балла (при раздельном выполнении 2 балла ставится за определение периода 1 балл – за определение большой полуоси). Участники могут сделать это развернутым способом, как приведено выше, а могут сразу оценить синодический период астероида (1.2 года) и вычислить из него орбитальный период, что также считается правильным. Если участник сразу и без обоснования пишет, что орбитальный период астероида составляет 6 лет, то 2 балла за первый этап решения не выставляются, но дальнейшее решение оценивается в полной мере (максимальная оценка – 6 баллов).

Вывод о том, что в моменты времени 0, 6 и 12 лет астероид находится в перигелии и противостоянии, а в моменты времени 3 и 9 лет – в афелии и соединении (сделанный в явном виде либо следующий из рисунка), оценивается в 2 балла. Вычисление эксцентриситета орбиты астероида оценивается в 3 балла.