

## Решения и критерии оценивания

### Задача 1

На полный обгон теплоходом каравана барж потребовалось  $t_1 = 2$  минуты, а катер обгонял теплоход  $t_2 = 1$  мин. Какое время  $t_3$  потребуется катеру на обгон каравана барж? Известно, что катер совсем маленький, а длина каравана в три раза больше длины теплохода. Все суда идут равномерно.

#### *Возможное решение*

Пусть  $L$  – длина теплохода,  $v$  – скорость теплохода,  $u$  – скорость каравана барж,  $V$  – скорость катера. По условию задачи теплоход обгонял караван барж в течение времени  $t_1$ , следовательно,  $(v - u)t_1 = 4L$ , где  $4L$  – суммарная длина теплохода и каравана. Катер же обгонял теплоход время  $t_2$ , значит,  $(V - v)t_2 = L$ . Из этих двух уравнений найдём скорость сближения катера и каравана:

$$V - u = \frac{L}{t_2} + \frac{4L}{t_1}.$$

Тогда катеру потребуется на обгон каравана барж время  $t_3$ , равное:

$$t_3 = \frac{3L}{V - u} = \frac{3L}{\frac{L}{t_2} + \frac{4L}{t_1}} = \frac{3t_1 t_2}{t_1 + 4t_2} = 1 \text{ мин.}$$

#### *Критерии оценивания*

Записано условие обгона теплоходом каравана барж .....	<b>3 балла</b>
Записано условие обгона катером теплохода.....	<b>3 балла</b>
Найдена скорость сближения катера и каравана барж.....	<b>2 балла</b>
Найдено время $t_3$ .....	<b>2 балла</b>

*За каждое верно выполненное действие баллы складываются.*

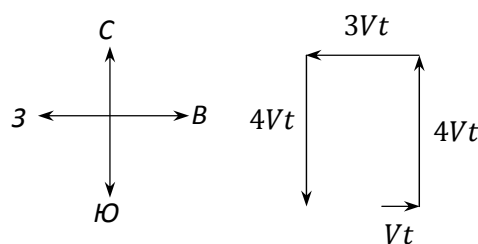
*Максимум за задание – 10 баллов.*

### Задача 2

Муравей отправился на разведку. Стартовав от муравейника, он в течение времени  $t = 10$  с полз на восток со скоростью  $V = 1$  см/с. Затем муравей повернул и в течение времени  $2t$  двигался со скоростью  $2V$  на север. Потом он бежал на запад в течение времени  $t$  со скоростью  $3V$  и, наконец, повернув на юг, мчался с максимально возможной скоростью  $4V$  ещё в течение времени  $t$ . После этого его движение в точности повторялось. Через 20 мин. поиска муравей обнаружил добычу. Какое минимальное время потребуется ему для возвращения в муравейник, если при движении с добычей муравей может развивать скорость, в 3 раза меньшую максимально возможной?

### Возможное решение

На рисунке изображено движение муравья в течение первых 50 секунд. Далее движение повторяется, следовательно, за каждые 50 секунд муравей смещается на запад на расстояние  $2Vt = 20$  см. Время 20 минут (или 1200 секунд) кратно 50 с. Поэтому через 20 минут он окажется на расстоянии  $20 \cdot \frac{20 \cdot 60}{50} = 480$  см от муравейника.



Так как максимально возможная скорость муравья при движении с добычей  $4/3$  см/с, значит, минимальное время, за которое муравей вернётся обратно, равно  $\frac{480}{4/3} = 360$  с = 6 мин.

### Критерии оценивания

Найдено смещение муравья на восток .....	0,5 балла
Найдено смещение муравья на север .....	0,5 балла
Найдено смещение муравья на запад .....	0,5 балла
Найдено смещение муравья на юг .....	0,5 балла
Отмечено, что за каждые 50 секунд муравей смещается на запад на 20 см .....	1 балл
Найдено расстояние от муравейника через 20 минут .....	4 балла
Найдено минимальное время, за которое муравей вернётся обратно .....	3 балла

За каждое верно выполненное действие баллы складываются.

Максимум за задание – 10 баллов.

### Задача 3

После добавления сиропа объёмом  $V = 1$  л в большую кастрюлю, частично заполненную водой, плотность содержимого кастрюли возросла на  $\Delta\rho = 20$  кг/м<sup>3</sup>, а объём того, что содержится в кастрюле, увеличился на четверть. Чему равна плотность сиропа? Какой объём сиропа надо дополнительно добавить к полученной смеси, чтобы увеличить её плотность ещё на  $\Delta\rho$ ? Считайте, что сироп хорошо растворяется в воде и что объём смеси равен сумме объёмов исходных жидкостей. Плотность воды  $\rho_0 = 1000$  кг/м<sup>3</sup>.

### Возможное решение

Так как объём содержимого кастрюли увеличился на четверть после первого добавления сиропа, значит, масса воды равна:  $m = \rho_0 \cdot 4V = 4$  кг. При этом плотность содержимого кастрюли возросла на  $\Delta\rho$ , стало быть:

$$\rho_0 + \Delta\rho = \frac{m+m_c}{5V} \Rightarrow \rho_c = \frac{m_c}{V} = 5 \cdot \left( \rho_0 + \Delta\rho - \frac{m}{5V} \right) = 1100 \text{ кг/м}^3,$$

где  $m_c$  – масса 1 литра сиропа,  $\rho_c$  – плотность сиропа.

Пусть  $V_x$  – объём второй порции сиропа, тогда:

$$\rho_0 + 2\Delta\rho = \frac{m+m_c+\rho_c V_x}{5V+V_x} \Rightarrow V_x = \frac{\Delta\rho \cdot 5V}{\rho_c - \rho_0 - 2\Delta\rho} \approx 1,67 \text{ л.}$$

### **Критерии оценивания**

Найден объём воды .....	<b>1 балл</b>
Найдена массы воды .....	<b>1 балл</b>
Найдена плотность сиропа .....	<b>4 балла</b>
Найден объём сиропа, который надо дополнительно добавить к смеси....	<b>4 балла</b>

*За каждое верно выполненное действие баллы складываются.*

*Максимум за задание – 10 баллов.*

### **Задача 4**

Короб – мера объёма засыпного древесного угля, заготавливаемого на горных заводах. По указу 1847 г. для казённых заводов нормальная форма коробка определена как опрокинутая усечённая пирамида с прямоугольным основанием (в четвертях аршина) длиной 12 и шириной 3, вверху длиной 14 и шириной 6, при высоте 6, то есть равная по объёму 22 656 куб. вершков (или по массе 20 пудов угля). По тексту этого указа определите, чему равна средняя плотность засыпанного в короб древесного угля, выраженная в  $\text{кг}/\text{м}^3$ . Известно, что 1 пуд = 16,38 кг, 16 вершков составляют 1 аршин = 0,711 метра.

### **Возможное решение**

1 пуд = 16,38 кг, значит, 20 пудов =  $20 \cdot 16,38 = 327,6$  кг. 16 вершков = 0,711 м, следовательно, 22 656 куб. вершков =  $22\,656 \cdot \left(\frac{0,711}{16}\right)^3 \approx 1,988 \text{ м}^3$ . Стало быть, плотность древесного угля равна:

$$\rho = \frac{327,6}{1,988} \approx 165 \text{ кг}/\text{м}^3.$$

### **Критерии оценивания**

Переведены 20 пудов в килограммы .....	<b>2 балла</b>
Переведены 22 656 куб. вершков в $\text{м}^3$ .....	<b>5 баллов</b>
Найдена плотность засыпанного в короб древесного угля.....	<b>3 балла</b>

*За каждое верно выполненное действие баллы складываются.*

*Максимум за задание – 10 баллов.*

<b>Всего за работу – 40 баллов.</b>
-------------------------------------