Решения и система оценивания

Задача 1

Стоя на движущемся вниз эскалаторе, мальчик подбросил монетку, как ему показалось, вертикально вверх, и через $\tau = 1$ с поймал её. Скорость эскалатора $V = 1$ м/с, а угол его наклона к горизонту $\alpha = 30^\circ$. На какое максимальное расстояние от точки бросания удалялась монетка? В течение какого времени монетка поднималась вверх в системе отсчёта, связанной со стенами шахты эскалатора? Ускорение свободного падения можно считать равным $g = 10$ м/с^2.

Возможное решение

Максимальное расстояние, на которое монетка удалялась от точки её бросания, проще всего искать в системе отсчёта, связанной с эскалатором. В этой системе отсчёта начальная скорость монетки направлена вертикально, следовательно,

$$s_{max} = \frac{g(\tau/2)^2}{2} = 1{,}25 \text{ м.}$$

Возможны также решения, в которых ищется максимальное расстояние от монетки до точки бросания (точка пространства) в системе отсчёта, связанной со стенами шахты эскалатора. ТАКОЕ РЕШЕНИЕ ТОЖЕ СЛЕДУЕТ СЧИТАТЬ ПРАВИЛЬНЫМ. В этой системе отсчёта вертикальная составляющая начальной скорости монетки равна

$$v_1 = g\frac{\tau}{2} - V\sin\alpha\,,$$

(за положительное выбрано направление вверх), а горизонтальная составляющая начальной скорости монетки равна

$$v_2 = V\cos\alpha\,.$$

В момент максимального удаления монетки от точки броска, вектор смещения монетки $\vec{r}$ должен быть перпендикулярен вектору скорости монетки $\vec{v}$ (это равносильно тому, что в данный момент расстояние между монеткой и точкой броска не уменьшается и не увеличивается). Пусть $\overrightarrow{v_0}$ — начальная скорость монетки, тогда

$$\vec{v} = \overrightarrow{v_0} + \vec{g}t,$$
$$\vec{r} = \overrightarrow{v_0}t + \frac{\vec{g}t^2}{2}.$$

Момент времени, когда векторы $\vec{r}$ и $\vec{v}$ перпендикулярны, найдём из условия равенства нулю их скалярного произведения:

$$\vec{r}\cdot\vec{v} = v_0^2 t + \frac{3}{2}\overrightarrow{v_0}\cdot\vec{g}t^2 + \frac{1}{2}g^2t^3 = 0.$$

Проекция вектора $\overrightarrow{v_0}$ на ось, направленную вертикально вверх, равна v_1, поэтому

$$\overrightarrow{v_0}\cdot\vec{g} = -v_1 g.$$

По теореме Пифагора $v_0^2 = v_1^2 + v_2^2$. Получаем уравнение на t

$$g^2t^3 - 3v_1gt^2 + 2(v_1^2 + v_2^2)t = 0.$$

Аналогичное уравнение можно получить аналитически. Расстояние между монеткой и точкой броска будет меняться со временем по закону

$$r(t) = \sqrt{\left(v_1 t - \frac{gt^2}{2}\right)^2 + (v_2 t)^2},$$

$$r^2(t) = \frac{g^2}{4}t^4 - v_1gt^3 + v_1^2t^2 + v_2^2t^2.$$

Расстояние r будет максимально тогда, когда максимален квадрат расстояния r^2. Продифференцировав выражение для r^2 по времени, и приравняв производную к нулю, получим уравнение (такое же, как и из условия перпендикулярности векторов скорости и смещения)

$$g^2t^3 - 3v_1gt^2 + 2(v_1^2 + v_2^2)t = 0,$$

решение $t = 0$ соответствует минимуму функции $r^2(t)$. Поскольку мы ищем максимум, то уравнение можно сократить на t. Получим квадратное уравнение

$$g^2t^2 - 3v_1gt + 2(v_1^2 + v_2^2) = 0,$$

решив которое, найдём что расстояние максимально в момент времени

$$t_m = \frac{3v_1 - \sqrt{9v_1^2 - 8(v_1^2 + v_2^2)}}{2g} \approx 0{,}49 \text{ с}.$$

Второй корень квадратного уравнения рассматривать не нужно, поскольку он больше 1 с (то есть соответствует моменту времени после того, как мальчик поймал монетку). Максимальное расстояние между монеткой и точкой броска

$$r(t_m) \approx 1{,}09 \text{ м}.$$

Из закона сложения скоростей получаем, что в системе отсчёта, связанной со стенами шахты эскалатора, вертикальная составляющая начальной скорости монетки равна: $g(\tau/2) - V\sin\alpha$. Тогда

$$t = \frac{g(\tau/2) - V\sin\alpha}{g} = 0{,}45 \text{ с}.$$

Критерии оценивания

Найдено максимальное расстояние от монетки до точки её бросания (либо в системе отсчёта мальчика, либо в системе отсчёта стен шахты)................**4 балла**

Применён закон сложения скоростей ....**2 балла**

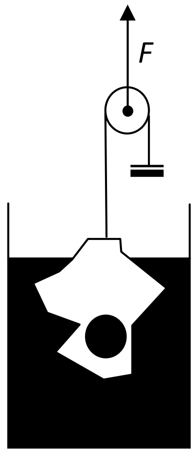
Найдено время t...**4 балла**

За каждое верно выполненное действие баллы складываются.

При арифметической ошибке (в том числе ошибке при переводе единиц измерения) оценка снижается на 1 балл.

Максимум за задание – **10 баллов**.

Задача 2



Льдинка с вмороженным в неё металлическим слитком подвешена на лёгкой нити и частично погружена в цилиндрический стакан с водой так, что лёд не касается стенок стакана. Площадь дна стакана $S = 100$ см^2. Для того, чтобы удержать льдинку в таком положении, нить перекидывают через идеальный блок, к оси которого прикладывают вертикально направленную силу $F = 10$ Н. На другой конец нити вешают подходящий противовес. На сколько изменится уровень воды в стакане после того, как льдинка растает? Повысится он или понизится? Масса слитка $m = 100$ г, плотность металла $\rho = 10\,000$ кг/м^3, плотность воды $\rho_0 = 1000$ кг/м^3. Ускорение свободного падения можно считать равным $g = 10$ м/с^2. Противовес после таяния льда не падает в стакан.

Возможное решение

Рассмотрим внешние силы, действующие на содержимое стакана, в которое включим воду, льдинку и слиток. Сила тяжести компенсируется двумя направленными вверх внешними силами – силой натяжения нити $F/2$ и силой реакции дна стакана. Последняя, в свою очередь, равна по модулю силе давления на дно со стороны жидкости. Из условия равновесия содержимого стакана в исходном состоянии следует:

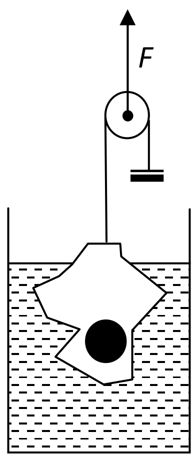
$$\frac{F}{2} + S\rho_0 g h_1 = m_{\text{содерж}} g,$$

где h_1 – высота уровня воды в исходном состоянии.

После таяния льдинки масса содержимого сохраняется, но изменяется уровень воды в стакане и, следовательно, давление воды около дна. Кроме этого, на содержимое перестаёт действовать сила $F/2$, но на дно с силой $N = mg - \frac{m}{\rho}\rho_0 g = mg\left(1 - \frac{\rho_0}{\rho}\right)$ начинает действовать слиток. Новое условие равновесия содержимого имеет вид:

$$S\rho_0 g h_2 + N = m_{\text{содерж}} g,$$

где h_1 – высота уровня воды в исходном состоянии.



Вычитая из первого уравнения второе, получим выражение для изменения уровня воды в стакане:

$$\Delta h = h_2 - h_1 = \frac{\frac{F}{2} - mg\left(1 - \frac{\rho_0}{\rho}\right)}{\rho_0 g S} = 4{,}1 \text{ см}.$$

Так как эта величина положительная, то уровень воды в стакане повысится.

Критерии оценивания

Записано условие равновесия содержимого в исходном состоянии .... **2 балла**
Записано условие равновесия содержимого в конечной ситуации .... **2 балла**
Получено выражение для изменения уровня жидкости.............................. **2 балла**
(Если задача решалась через объём погружённой льдинки и изменение объёмов при таянии, то за верное выражение для изменения уровня – 6 баллов.)
Получено численное значение для изменения уровня жидкости .... **2 балла**
Явно указано, что уровень повысится... **2 балла**

За каждое верно выполненное действие баллы складываются.
При арифметической ошибке (в том числе ошибке при переводе единиц измерения) оценка снижается на 1 балл. Максимум за задание **– 10 баллов**.

Задача 3

Один моль аргона участвует в процессе, в ходе которого теплоёмкость остаётся постоянной и равной $C = 10\ \frac{\text{Дж}}{\text{К}}$. При этом аргон увеличил свой объём, совершив работу $A = 40$ Дж. Найдите изменение температуры аргона и подведённое к нему количество теплоты.

Возможное решение

Запишем для данного процесса первое начало термодинамики:

$$\Delta Q = C\Delta T = \frac{3}{2}\nu R\Delta T + A \ \ \Rightarrow \ \ \Delta T = \frac{A}{C - 1{,}5\nu R} = -16{,}2 \text{ К},$$

т. е. газ охлаждался. Подведённое к газу количество теплоты равно:

$$Q = C\Delta T = -162 \text{ Дж},$$

т. е. газ в данном процессе отдавал теплоту.

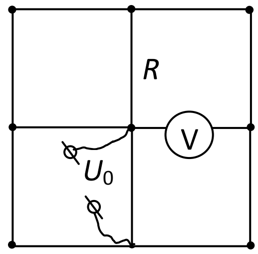
Критерии оценивания

Записано первое начало термодинамики .... **4 балла**
Найдено изменение температуры газа .... **2 балла**
Найдено количество теплоты .... **2 балла**
Указано, что газ тепло отдавал (получен ответ со знаком минус)............. **2 балла**

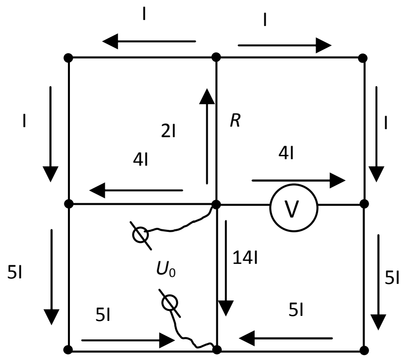
За каждое верно выполненное действие баллы складываются.
При арифметической ошибке (в том числе ошибке при переводе единиц измерения) оценка снижается на 1 балл.
Максимум за задание **– 10 баллов**.

Задача 4

Электрическая цепь представляет собой проволочную сетку, состоящую из звеньев, имеющих одинаковые сопротивления R. Одно звено заменено на вольтметр, сопротивление которого тоже равно R. К сетке подключён источник напряжения $U_0 = 14$ В так, как показано на рисунке. Найдите показание вольтметра.



Возможное решение



Изобразим схематически токи, текущие в звеньях сетки, учитывая её симметрию и закон Ома для участка цепи. Согласно этому закону, силы тока в параллельных звеньях, находящихся под одинаковым напряжением, обратно пропорциональны сопротивлениям этих звеньев. При изображении токов также нужно учитывать закон сохранения электрического заряда для узлов сетки – сумма токов, втекающих в узел, должна быть равна сумме токов, вытекающих из узла.

Точки подключения источника напряжения расположены на вертикальной оси симметрии сетки. Поэтому токи, текущие налево и направо от оси симметрии сетки, вытекающие из данного узла или втекающие в данный узел, должны быть одинаковыми. Обозначим токи, текущие налево и направо от верхнего среднего узла сетки, через I. Тогда ток, втекающий в верхний средний узел, равен $2I$. При обходе левой (и правой) верхней четверти сетки суммарное падение напряжения должно быть равно нулю. Следовательно, токи, текущие налево и направо от центрального узла сетки, одинаковы и равны $4I$. Значит, токи, текущие вниз от левого среднего и от правого среднего узла сетки, равны $5I$.

Выразим напряжение источника U_0 через ток I. Для того чтобы сделать это, мысленно сложим схему пополам вдоль вертикальной оси симметрии. Тогда сопротивления всех звеньев, не лежащих на оси симметрии, уменьшатся в 2 раза, а текущие по ним токи увеличатся в 2 раза. Суммарное сопротивление всех звеньев, подключённых к источнику (за исключением звена, находящегося непосредственно между клеммами источника), равно $7R/5$. Текущий через эти звенья ток равен $10I$. Поэтому падение напряжения во внешней цепи между клеммами источника равно $U_0 = 14IR$. Отметим, что это заодно позволяет найти ток, текущий через звено между точками подключения источника напряжения. Он равен $14I$ и течёт от центрального узла сетки к нижнему среднему узлу.

Для вольтметра можно записать: $U_V = 4IR$. Отсюда $U_V = 4U_0/14 = 2U_0/7 = 4$ В.

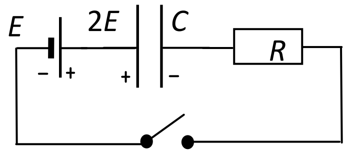
Критерии оценивания

Установлено распределение токов в звеньях сетки....................................**3 балла**
Найдена связь между током, текущим через вольтметр, и токами в других частях цепи...**1 балл**
Установлена связь между напряжением источника и током, текущим в какой-либо части цепи ....**2 балла**
Установлена связь между показанием вольтметра и током, текущим через него...**1 балл**
Получено выражение для связи напряжения источника и показания вольтметра...**2 балла**

Получен численный ответ для показания вольтметра ....**1 балл**

За каждое верно выполненное действие баллы складываются.
При арифметической ошибке (в том числе ошибке при переводе единиц измерения) оценка снижается на 1 балл.
Максимум за задание – **10 баллов**.

Задача 5



Электрическая цепь состоит из соединённых последовательно идеального источника напряжения с ЭДС $E = 12$ В, резистора, разомкнутого ключа и заряженного до напряжения $2E$ конденсатора (полярность указана на схеме). Ключ замыкают. Определите напряжение U на конденсаторе в тот момент, когда количество теплоты, выделившееся в резисторе, окажется в 3 раза меньше энергии, оставшейся в конденсаторе.

Возможное решение

Полярность зарядки конденсатора всегда останется такой же, какой она была вначале. Поскольку исходное напряжение на конденсаторе превышает ЭДС источника, то после замыкания ключа ток в цепи потечёт против часовой стрелки. К интересующему нас моменту времени заряд, протекший через источник (и подзарядивший его), равен $q = C(2E - U)$. Запишем закон сохранения энергии с учётом выделившегося количества теплоты и работы, совершённой источником: $\frac{C(2E)^2}{2} = qE + Q + \frac{CU^2}{2}$. Отсюда, с учётом того, что $Q = \frac{1}{3}\cdot\frac{CU^2}{2}$, получим: $U = \frac{3E}{2} = 18$ В.

Критерии оценивания

Определена начальная энергия конденсатора...**1 балл**
Найден протёкший через источник заряд..**1 балл**
Найдена работа, совершённая источником ....**1 балл**
Записан закон сохранения энергии ....**4 балла**
Получено выражение для напряжения на конденсаторе ....**2 балла**
Получено численное значение напряжения на конденсаторе ....**1 балл**

За каждое верно выполненное действие баллы складываются.
При арифметической ошибке (в том числе ошибке при переводе единиц измерения) оценка снижается на 1 балл. Максимум за задание – **10 баллов**.

Всего за работу – 50 баллов.