9 класс

1. В зоопарке есть 10 слонов и огромные чашечные весы. Известно, что если любые четыре слона встанут на левую чашу весов, а любые три – на правую, то левая чаша перевесит. Пять слонов встали на левую чашу и четыре – на правую. Обязательно ли левая чаша перевесит?

Ответ: не обязательно.

Решение. Приведём контрпример. Пусть пять слонов весят по 7 тонн, а ещё пять – по 9 тонн каждый. Тогда любые четыре слона на левой чаше весов вместе весят не менее, чем $4 \cdot 7 = 28$ тонн, а любые три слона на правой – не более, чем $3 \cdot 9 = 27$ тонн, и левая чаша действительно перевесит.

Но если пять “лёгких” слонов общей массой $5 \cdot 7 = 35$ тонн встанут на левую чашу весов, а четыре “тяжёлых” слона общей массой $4 \cdot 9 = 36$ тонн на правую, то перевесит правая чаша.

Существует и много других контрпримеров. В приведенном примере масса слонов правдоподобна. От школьников этого не требуется.

<u>Критерии проверки</u>.

“+” – *приведен любой верный контрпример с доказательством его пригодности*
“±” – *приведен верный контрпример, но не объяснена его пригодность*
“–” – *приведен верный ответ с неверным контрпримером*
“–” – *приведен только ответ*

2. На доске записаны двузначные числа. Каждое число составное, но любые два числа взаимно просты. Какое наибольшее количество чисел может быть записано?

Ответ: четыре числа.

Решение. <u>Оценка</u>. Так как любые два записанных числа взаимно просты, то каждое из простых чисел 2, 3, 5 и 7 может войти в разложение на множители не более, чем одного из них. Если же на доске пять или более чисел, то все простые множители в разложении какого-то из них должны быть не меньше, чем 11. Но это составное число, значит, оно не меньше, чем 121. Это противоречит условию: все записанные числа двузначные. Следовательно, на доске записано не более четырёх чисел.

<u>Пример</u>. 25, 26, 33, 49.

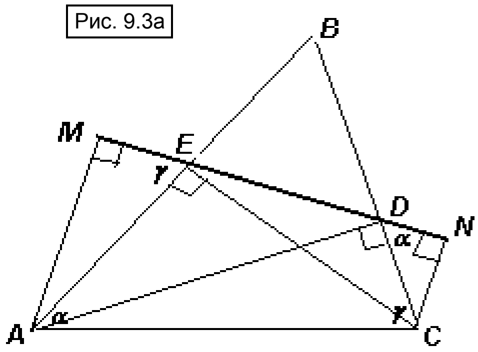
Существуют и другие примеры.

<u>Критерии проверки</u>.

“+” – *приведено полное обоснованное решение*
“±” – *приведена верная оценка, но пример не приведен или он неверен*
“∓” – *приведены только верный ответ и верный пример*
“–” – *приведен только ответ*
“–” – *задача не решена или решена неверно*

3. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AD и CE. Точки M и N – основания перпендикуляров, опущенных на прямую DE из точек A и C соответственно. Докажите, что $ME = DN$.

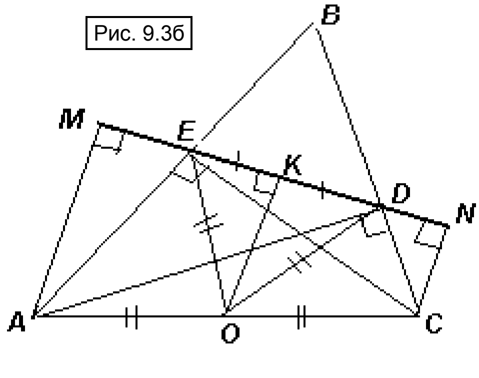
Решение. Так как $\angle ADC = \angle AEC$, то четырехугольник $AEDC$ – вписанный. Далее можно рассуждать по-разному.



<u>Первый способ</u>. По свойству вписанного четырехугольника $\angle NDC = \angle BAC = \alpha$, $\angle MEA = \angle BCA = \gamma$ (см. рис. 9.3а). Тогда, используя прямоугольные треугольники AME и AEC, получим: $ME = AE \cdot \cos\gamma = AC \cdot \cos\alpha \cdot \cos\gamma$. Аналогично, $DN = DC \cdot \cos\alpha = AC \cdot \cos\gamma \cdot \cos\alpha$.

Следовательно, $ME = DN$, что и требовалось.

Отметим, что использованные равенства углов можно получить из подобия треугольников DBE и ABC, которое, в свою очередь, можно получить из подобия треугольников ABD и CBE (если не использовать окружность).



<u>Второй способ</u>. Воспользуемся тем, что центром окружности, описанной около $AEDC$, является середина O стороны AC. Так как треугольник DOE – равнобедренный, то его высота OK является и его медианой, те есть $EK = KD$ (см. рис. 9.3б). Прямые AM, OK и CN перпендикулярны прямой ED, поэтому параллельны друг другу. Из того, что $AO = OC$ по теореме Фалеса следует, что $MK = KN$. Тогда $ME = MK – EK = KN – KD = DN$, что и требовалось.

И в этом способе решения необязательно “напрямую” использовать окружность. Равенство OE = OD следует из того, что эти отрезки являются медианами прямоугольных треугольников с общей гипотенузой и проведены к ней.

<u>Критерии проверки</u>.

“+” – *приведено полное обоснованное решение*

“±” – *приведено верное в целом решение с пробелами в обосновании или с ошибкой, не меняющей логики доказательства (например, перепутаны синус и косинус)*
“–” – *задача не решена или решена неверно*

4. Что больше: $\sqrt{2016}+\sqrt{2015+\sqrt{2016}}$ или $\sqrt{2015}+\sqrt{2016+\sqrt{2015}}$?

Ответ: $\sqrt{2016}+\sqrt{2015+\sqrt{2016}}>\sqrt{2015}+\sqrt{2016+\sqrt{2015}}$.

Решение. Первый способ. Пусть a = $\sqrt{2016}+\sqrt{2015+\sqrt{2016}}$ > 0, b = $\sqrt{2015}+\sqrt{2016+\sqrt{2015}}$ > 0. Тогда a^2-b^2 = $\left(\sqrt{2016}+\sqrt{2015+\sqrt{2016}}\right)^2$ – $\left(\sqrt{2015}+\sqrt{2016+\sqrt{2015}}\right)^2$ = $\sqrt{2016}$ – $\sqrt{2015}$ + $2\sqrt{2016\cdot 2015+2016\sqrt{2016}}$ – $2\sqrt{2016\cdot 2015+2015\sqrt{2015}}$ > 0, так как $\sqrt{2016}$ > $\sqrt{2015}$ и 2016$\sqrt{2016}$ > 2015$\sqrt{2015}$ (функция у = $\sqrt{x}$ – возрастающая). Следовательно, $a^2>b^2$, то есть a > b.

Второй способ. Сравним $\sqrt{2016}-\sqrt{2015}$ и $\sqrt{2016+\sqrt{2015}}-\sqrt{2015+\sqrt{2016}}$. Разделим второе число на первое и сравним частное с единицей. Для этого преобразуем полученную дробь, используя умножение числителя и знаменателя на одно и то же число, отличное от нуля. Получим:

$$(\sqrt{2016+\sqrt{2015}}-\sqrt{2015+\sqrt{2016}}):(\sqrt{2016}-\sqrt{2015})=$$
$$=\frac{(2016+\sqrt{2015})-(2015+\sqrt{2016})}{(\sqrt{2016+\sqrt{2015}}+\sqrt{2015+\sqrt{2016}})(\sqrt{2016}-\sqrt{2015})}=$$
$$=\frac{(1+\sqrt{2015}-\sqrt{2016})(\sqrt{2016}+\sqrt{2015})}{\sqrt{2016+\sqrt{2015}}+\sqrt{2015+\sqrt{2016}}}=\frac{\sqrt{2016}+\sqrt{2015}-1}{\sqrt{2016+\sqrt{2015}}+\sqrt{2015+\sqrt{2016}}}<1$$

, так как $\sqrt{2016}<\sqrt{2016+\sqrt{2015}}$, а $\sqrt{2015}<\sqrt{2015+\sqrt{2016}}$.

Умножив обе части неравенства $(\sqrt{2016+\sqrt{2015}}-\sqrt{2015+\sqrt{2016}}):(\sqrt{2016}-\sqrt{2015})<1$ на положительное число $\sqrt{2016}-\sqrt{2015}$, получим, что $\sqrt{2016+\sqrt{2015}}-\sqrt{2015+\sqrt{2016}}<\sqrt{2016}-\sqrt{2015}$ $\Leftrightarrow$ $\sqrt{2016}+\sqrt{2015+\sqrt{2016}}>\sqrt{2015}+\sqrt{2016+\sqrt{2015}}$.

Критерии проверки.
“+” – *приведено полное обоснованное решение*
“±” – *приведены верные выкладки, но допущены неточности в обоснованиях или логические погрешности*
“–” – *приведен только ответ*
“–” – *задача не решена или решена неверно*

5. Германн и Чекалинский разложили на столе 13 различных карт. Каждая карта может лежать в одном из двух положений: рубашкой вверх или рубашкой вниз. Игроки должны по очереди переворачивать по одной карте. Проигрывает тот игрок, после хода которого повторится какая-то из предыдущих ситуаций (включая изначальную). Первый ход сделал Чекалинский. Кто сможет выиграть независимо от того, как будет играть соперник?

Ответ. Чекалинский.

Решение. Выигрышная стратегия Чекалинского состоит в том, чтобы каждый раз переворачивать одну и ту же карту (например, пиковую даму). Все возможные позиции можно разбить на пары, отличающиеся лишь расположением пиковой дамы. Если в ответ на ход Чекалинского Германн тоже перевернёт пиковую даму, то повторится предыдущая позиция, и он проиграет. Поэтому он вынужден переворачивать другую карту. А Чекалинский, перевернув в ответ пиковую даму, получит позицию, парную к той, которая только что была. Таким образом, каждым ходом Германну придётся “начинать” новую пару, и Чекалинский всегда сможет сделать ответный ход, “закончив” пару. Так как количество возможных позиций конечно, то рано или поздно Германн не сможет открыть новую пару и проиграет.

Критерии проверки.
“+” – *приведена верная стратегия и доказано, что она выигрышная*
“±” – *приведена верная стратегия, но доказательство того, что она выигрышная, недостаточно убедительно*
“∓” – *приведена верная стратегия, но доказательство того, что она выигрышная, отсутствует или абсолютно неверно*
“–” – *выигрышная стратегия не указана или проверяющему неясно, является ли приведённая стратегия выигрышной.*
“–” – *задача не решена или решена неверно*

Комментарий. В некоторых математических играх можно определить победителя и без приведения конкретной стратегии. Но авторы варианта полагают, что в данной задаче это не так.

6. Высоты неравнобедренного остроугольного треугольника *ABC* пересекаются в точке *H*. *O* — центр описанной окружности треугольника *BHC*. Центр *I* вписанной окружности треугольника *ABC* лежит на отрезке *OA*. Найдите угол *BAC*.

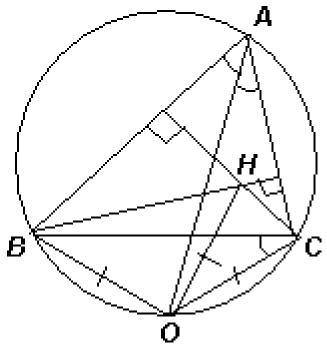


Рис. 9.6а

Ответ. 60°.

Решение. Из условия задачи следует, что точка *O* лежит на пересечении биссектрисы угла *A* и серединного перпендикуляра к стороне *BC*. Так как эти прямые пересекаются на описанной окружности треугольника *ABC*, то *O* лежит на этой окружности и является серединой дуги *BC* (см. рис. 9.6 а, б). Кроме того, $\angle BHC = 180° - \angle BAC$, так как *H* – ортоцентр треугольника *ABC*. Далее можно рассуждать по-разному.

<u>Первый способ</u>. Обозначим углы треугольника *ABC*: $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$, $\angle C = \gamma$. (см. рис. 9.6а) Тогда $\angle OCB = \angle OAB = \alpha/2$, $\angle BCH = 90° - \beta$, $\angle OCH = \angle OCB + \angle BCH = 90° + \alpha/2 - \beta$.

В треугольнике *OHC*: *OH* = *OC* (радиусы одной окружности), поэтому $\angle OHC = \angle OCH = 90° + \alpha/2 - \beta$. Аналогично, $\angle OHB = \angle OBH = 90° + \alpha/2 - \gamma$. Тогда $\angle BHC = \angle OHB + \angle OHC = 90° + \alpha/2 - \gamma + 90° + \alpha/2 - \beta = 180° + \alpha - \gamma - \beta = 2\alpha$.

Так как $\angle BHC = 180° - \alpha$, то получим уравнение $2\alpha = 180° - \alpha$, откуда $\alpha = 60°$.

<u>Второй способ</u>. Воспользуемся тем, что окружность, описанная около треугольника *BHC*, симметрична описанной окружности треугольника *ABC* относительно прямой *BC* (см. рис. 9.6б). Тогда центр *P* описанной окружности треугольника *ABC* лежит на дуге *BHC*. Следовательно, $\angle BHC = \angle BPC = 2\angle BAC$. Из того, что $180° - \angle BAC = 2\angle BAC$, получим: $\angle BAC = 60°$.

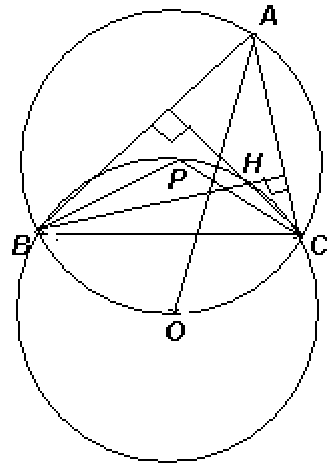


Рис. 9.6б

<u>Критерии проверки</u>.

"+" – *приведено полное обоснованное решение*

"±" – *приведено верное в целом решение с незначительными пробелами в обоснованиях*

"∓" – *приведены верные рассуждения, но допущена ошибка в счете углов, которая привела к неверному ответу*

"∓" – *доказано, что точка О принадлежит описанной окружности треугольника АВС, но других продвижений нет*

"–" – *приведен только ответ*

"–" – *задача не решена или решена неверно*