7 класс

1. Поставьте в каждом из шести чисел по одной запятой так, чтобы равенство стало верным: 2016 + 2016 + 2016 + 2016 + 2016 = 46368.

Ответ: 20,16 + 20,16 + 20,16 + 201,6 + 201,6 = 463,68 или 2,016 + 2,016 + 2,016 + 20,16 + 20,16 = 46,368.

<u>*Критерии проверки*</u>.

"+" – *приведен любой верный ответ (пример)*
"±" – *приведено несколько примеров, среди которых есть как верный, так и неверные*
"–" – *верный пример не приведен*

2. Вчера Никита купил несколько ручек: чёрные – по 9 рублей за штуку и синие – по 4 рубля за штуку. Зайдя сегодня в тот же магазин, он обнаружил, что цены на ручки изменились: чёрные стали стоить 4 рубля за штуку, а синие – 9 рублей. Увидев такое, Никита сказал с досадой: "Покупай я те же ручки сегодня, сэкономил бы 49 рублей". Не ошибается ли он?

Ответ: Никита ошибается.

Решение. <u>Первый способ</u>. Пусть Никита купил x черных ручек и y синих ручек, тогда он заплатил $9x + 4y$ рублей. После изменения цен стоимость ручек стала равна $4x + 9y$ рублей. Пусть Никита не ошибся, тогда $(9x + 4y) - (4x + 9y) = 49$. Преобразовав левую часть этого уравнения, получим: $5(x - y) = 49$.

Так как x и y – целые числа, то число $(x - y)$ также целое. Тогда полученное уравнение не имеет целых решений, так как 49 не делится на 5. Противоречие.

<u>Второй способ</u>. Заметим, что цена каждой ручки изменилась на 5 рублей, значит, что и общая стоимость всех ручек изменилась на величину кратную пяти. Так как 49 не делится на 5, то Никита ошибается.

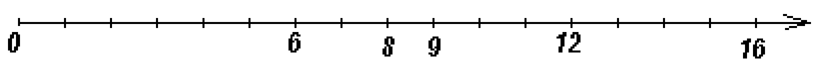
<u>*Критерии проверки*</u>.

"+" – *приведено полное обоснованное решение*
"±" – *приведено верное в целом рассуждение с незначительными пробелами*
"∓" – *верно составлено уравнение, но дальнейших продвижений нет*
"∓" – *присутствует утверждение о противоречии, связанном с делимостью на 5, но оно не обосновано*
"–" – *ответ получен на основании рассмотрения частных случаев*
"–" – *приведен только ответ*
"–" – *задача не решена или решена неверно*

3. На координатной прямой отмечено несколько точек (больше двух). Каждая точка, кроме двух крайних, находится ровно посередине между какими-то двумя отмеченными. Могут ли все отрезки, внутри которых нет отмеченных точек, иметь различные длины?

Ответ: могут.

Рис. 7.3



Решение.

Отметим на координатной прямой точки, соответствующие числам 0, 6, 8, 9, 12, 16 (см. рис. 7.3). Тогда 6 – середина отрезка [0;12], 8 – середина отрезка [0;16], 9 – середина отрезка [6; 12], 12 – середина отрезка [8; 16]. При этом, длины всех отрезков, не содержащих отмеченных точек, различны: 6; 2; 1; 3; 4 (слева направо).

Существуют и другие примеры.

<u>*Критерии проверки*</u>.

"+" – *приведен верный пример, показано, что длины всех отрезков различны и что каждая отмеченная точка, кроме крайних, является серединой какого-то из отрезков*
"±" – *приведен верный пример, но не показано, что длины отрезков различны и / или что каждая точка – середина какого-то отрезка*
"–" – *приведен неверный пример*
"–" – *приведен только ответ*
"–" – *задача не решена или решена неверно*

4. В трёх клетках таблицы 3×3 стоят числа (см. рисунок). Требуется заполнить числами остальные клетки так, чтобы во всех строках, столбцах и главных диагоналях суммы чисел оказались равными. Докажите, что это можно сделать единственным способом, и заполните таблицу.

1		**5**
3		

Решение. <u>Первый способ</u>. Пусть в пустой клетке верхней строки стоит число x, тогда сумма чисел в этой строке равна $6 + x$. Для того, чтобы сумма чисел первого столбца была такой же, в пустой клетке этого столбца должно стоять число $x + 2$. Рассматривая диагональ от левой нижней клетки до правой верхней и рассуждая аналогично, получим, что в центральной клетке должно стоять число $x - 2$. Тогда справа от него – число $6 - x$, а под ним – число $8 - x$ (см. рис. 7.4а).

1	x	**5**
$x + 2$	$x - 2$	$6 - x$
3	$8 - x$	$2x - 5$

Рис. 7.4а

Для того, чтобы суммы чисел третьей строки и третьего столбца были равны $6 + x$, в правой нижней клетке должно стоять число $2x - 5$. С другой стороны, там должно стоять число 7, чтобы сумма чисел во второй диагонали была такой же. Значит $2x - 5 = 7$, откуда $x = 6$. Следовательно, таблица восстанавливается однозначно (см. рис. 7.4б), что и требовалось.

Рис. 7.4б

1	6	**5**
8	4	0
3	2	7

1	$6 + t$	**5**
	$4 + t$	
3	$2 - t$	**?**

Рис. 7.4в

Второй способ. Заполним таблицу так, как показано на рис. 7.4б, тогда такая расстановка чисел удовлетворяет условию. Пусть есть другая расстановка, удовлетворяющая условию, в которой в центральной клетке верхней строки стоит число $6 + t$, где $t \neq 0$, тогда сумма чисел в верхней строке равна $12 + t$. В этом случае, в центральной клетке должно стоять число $4 + t$, значит, в центральной клетке нижней строки – число $2 - t$ (см. рис. 7.4в). Но тогда возникает противоречие: в правой нижней клетке, исходя из суммы в строке, должно стоять число $7 + 2t$, а, исходя из суммы по диагонали, должно стоять 7. Следовательно, таблица восстанавливается однозначно.

Критерии проверки.

"+" – *приведено полное обоснованное решение*

"±" – *доказано, что таблица может быть восстановлена однозначно, но сама заполненная таблица не приведена или при ее заполнении допущены вычислительные ошибки*

"±" – *приведено верное в целом рассуждение, содержащее незначительные пробелы или неточности*

"∓" – *верно показано заполнение таблицы, но не доказана единственность*

"–" – *задача не решена или решена неверно*

5. Вдоль прямолинейного участка границы установлено 15 столбов. Около каждого столба поймали несколько близоруких шпионов. Каждый из них честно сказал, сколько других шпионов он видел. Но любой шпион видел только тех, кто находился около его столба и около ближайших соседних столбов. Можно ли по этим данным восстановить численность шпионов, пойманных около каждого столба?

Ответ: можно.

Решение. Занумеруем столбы числами от 1 до 15 слева направо. Из опроса всех шпионов, пойманных у второго столба, узнаем суммарную численность шпионов у первых трех столбов, а из опроса шпионов, пойманных у первого столба, узнаем численность шпионов, пойманных у первого и второго столбов. Вычитая из первого результата второй, узнаем сколько шпионов поймали у третьего столба.

Далее, опросив шпионов, пойманных у пятого и четвертого столбов, и зная количество шпионов, пойманных у третьего столба, найдем количество шпионов, пойманных у шестого столба. Аналогично определяется, сколько шпионов поймано у столбов с номерами 9, 12 и 15.

Теперь, опросив шпионов у столба с номером 15, узнаем, сколько шпионов поймано у столба с номером 14. Дальнейшие опросы можно проводить "с конца" различными способами. Например, достаточно опросить шпионов у столбов с номерами 14, 12, 10, 9, 7, 6, 4, 3, устанавливая тем самым, сколько шпионов поймано у столбов с номерами 13, 11, 10, 8, 7, 5, 4, 2 и 1 соответственно.

Критерии проверки.

"+" – *приведено полное обоснованное решение*

"±" – *верно описан алгоритм, позволяющий ответить на вопрос задачи, но не написано, как именно находить требуемые количества*

"∓" – *присутствует верная идея решения, но она не доведена до конца*

"–" – *приведен только ответ*

"–" – *задача не решена или решена неверно*