

Возможные решение и критерии оценивания

Возможное решение Т-10-1

Перейдём в инерциальную систему отсчёта, в которой льдина неподвижна. В этой системе отсчёта скорость камня $\vec{v}_{\text{отн}} = \vec{v}_{\text{камня}} - \vec{v}_{\text{льдины}}$. В начальный момент скорость камня относительно льдины $\sqrt{3}v_0$.

Когда скольжение прекратится, скорость камня относительно льдины будет равна нулю. В этой системе отсчёта вся кинетическая энергия камня перейдёт в теплоту:

$$Q = \frac{3mv_0^2}{2}.$$

Движение камня в системе отсчёта льдины равноускоренное: на камень действует постоянная сила трения скольжения, направленная против относительной скорости. Так как льдина движется равномерно, движение камня равноускоренное и в исходной системе отсчёта. Из треугольника скоростей ($\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{a}t$) видим, что скорость минимальна в момент, когда относительная скорость уменьшилась в два раза, так как минимальная скорость перпендикулярна относительной скорости, а треугольник равнобедренный. Таким образом, скорость камня относительно мальчика минимальна через время $t/2$, где t – время движения до остановки.

Для равноускоренного торможения до остановки верно, что за первую половину времени тело проходит $\frac{3}{4}$ пути, поэтому максимальное удаление камня от края льдины $y = \frac{4}{3}h$. Относительно льдины тело переместилось на $L = \frac{y}{\sin 30^\circ} = 2y = \frac{8}{3}h$ в направлении $v_{\text{отн}}$.

Время равноускоренного торможения до остановки можно найти из условия $\frac{4}{3}h = \frac{1}{2}v_0 \cos 30^\circ \cdot t$, получается $t = \frac{16}{3\sqrt{3}} \frac{h}{v_0}$.

Смещение камня по горизонтали составляет $S_x = v_0 t - L_x = \frac{4}{3\sqrt{3}}h$. Смещение относительно мальчика

$$s = \sqrt{S_x^2 + y^2} = \frac{8}{3\sqrt{3}}h.$$

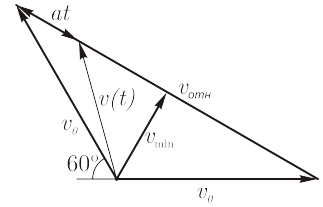


Рис. 10.10

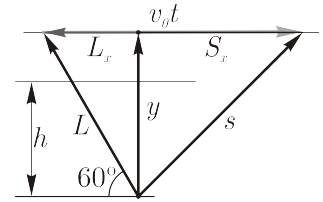


Рис. 10.11

Критерии оценивания Т-10-1

1. Найдена начальная относительная скорость $v_{\text{отн}} = \sqrt{3}v_0$... 1 балл
2. Найдено количество теплоты $Q = \frac{3mv_0^2}{2}$ 2 балла
3. Указано, что движение камня равноускоренное 2 балла
 - использование 1 балл
 - доказательство 1 балл
4. Найден момент, когда скорость минимальна 2 балла
5. Найдено максимальное перемещение $y = \frac{4}{3}h$ в направлении, перпендикулярном краю льдины 1 балл
6. Найдено время до остановки 0,5 балла
7. Найдено перемещение камня вдоль льдины $L_1 = \frac{4}{3\sqrt{3}}h$ к моменту окончания скольжения 0,5 балла
8. Найдено искомое расстояние от мальчика $s = 8\frac{h}{3\sqrt{3}}$ 1 балл

Возможное решение Т-10-2

На изогнутом участке центры шариков движутся по окружности радиуса $R = h/2$. Точка O на рисунке – её центр.

Скатывающая сила – проекция силы тяжести на касательную к траектории центра шарика – в нижней части скругления для переднего шарика больше, чем для заднего. Поэтому шарики не расходятся и давят друг на друга. В верхней части скругления скатывающая сила больше для заднего шарика, он отстаёт от переднего.

Критическое положение, где сила давления шарика на шарик уменьшается до 0, а их контакт исчезает, отвечает равенству скатывающих сил. Это случай, когда точка соприкосновения шариков находится на одной горизонтали с точкой O (правая часть рис.).

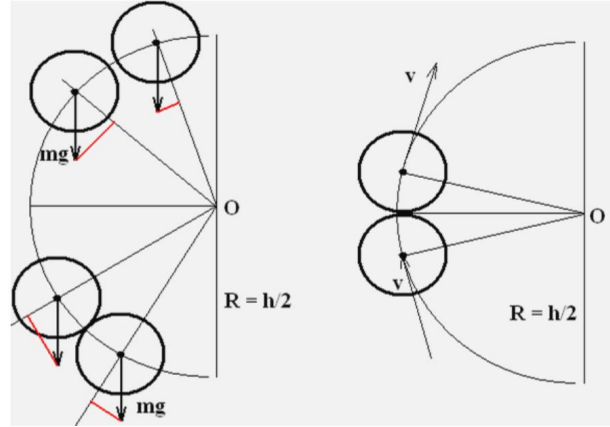


Рис. 10.12

Из сохранения энергии для скорости шариков v в критическом положении получаем: $v^2 = u^2 - 2gR = u^2 - gh$, где u начальная скорость.

Далее шарики движутся отдельно. Центр переднего шарика в критическом положении выше точки O . Передний окажется в верхнем колене, поднявшись на $h/2 - r$ от его положения в критический момент. Из сохранения энергии для его скорости вылета имеем:

$$v_1^2 = v^2 - 2g \left(\frac{h}{2} - r \right) = u^2 - 2g(h - r).$$

Условие, что передний шарик доберётся до верхнего колена и вылетит

$$v_1^2 > 0, \text{ то есть } u^2 > 2g(h - r).$$

Задний шарик не доберётся до верхнего колена и вылетит из нижнего, если его скорость обратится в 0 ещё на участке скругления. Граничный случай нулевая скорость заднего шарика в верхнем колене. Тогда из закона сохранения энергии получим:

$$\frac{2mu_{\max}^2}{2} = 2mgh + \frac{mv_1^2}{2}, \text{ и } u_{\max}^2 = 2g(h + r).$$

Тогда диапазон u задан неравенствами:

$$\begin{aligned} 2g(h + r) &> u^2 > 2g(h - r) \\ \text{или} \\ \sqrt{2g(h + r)} &> u > \sqrt{2g(h - r)}, \\ 4,58 \text{ м/с} &> u > 4,36 \text{ м/с}. \end{aligned}$$

Здесь числа посчитаны для $g = 10 \text{ м/с}^2$.

Критерии оценивания Т-10-2

1. Обоснование того, что на нижней четверти окружности шарики контактируют ... 1 балл
2. Обоснование того, что на верхней четверти окружности шарики не контактируют 1 балл
3. Найдены положения шариков в момент исчезновения контакта 1 балл
4. Найдена связь скорости v шариков в момент исчезновения контакта с u ($v^2 = u^2 - gh$) 1 балл
5. Найдена связь скорости v_1 вылета верхнего шарика через верхнюю трубку и v ($v_1^2 = v^2 - 2g(\frac{h}{2} - r)$) 1 балл
6. Условие вылета верхнего шарика через верхнюю трубку 0,5 балла
7. Найдена связь скорости v_2 нижнего шарика в верхней части трубки с v ($v_2^2 = v^2 - 2g(\frac{h}{2} + r)$) 1 балл
8. Условие вылета нижнего шарика через нижнюю трубку 0,5 балла
9. Аналитический диапазон для u (по 1 баллу за каждую границу) 2 балла
10. Численный диапазон для u (по 0,5 балла за каждую границу) 1 балл

Возможное решение Т-10-3

1. Анализируя график выделяем участки кривой:

(0-1) – давление насыщенных паров много меньше давления воздуха, смесь ведёт себя, как идеальный газ;

(1-2) – активный процесс испарения воды;

(2-3) – испарение всей жидкости, и увеличение давления, как у идеального газа.

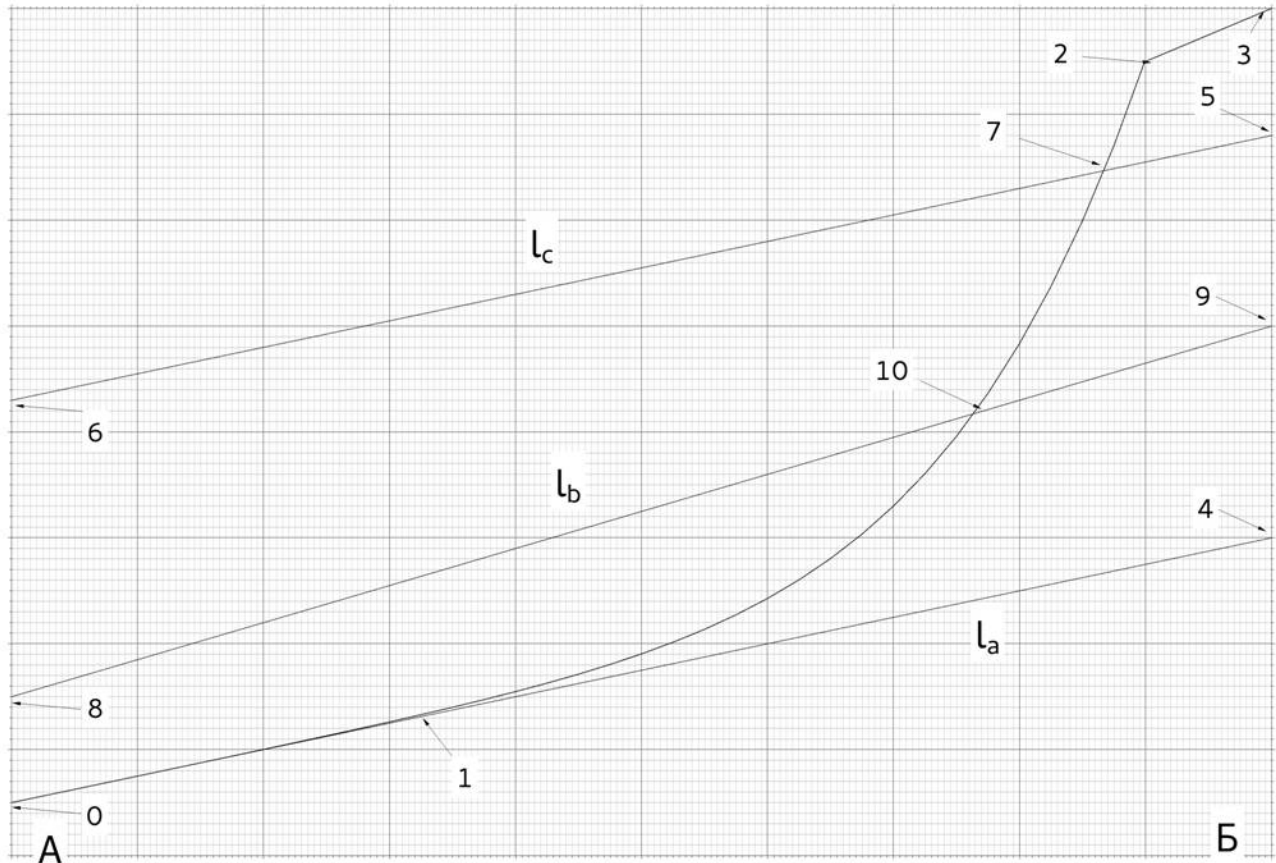


Рис. 10.13

При изохорическом нагреве давление идеального газа зависит от температуры по следующему закону:

$$P = \frac{\nu RT}{V},$$

следовательно, коэффициент наклона прямой $p(T)$ для идеального пропорционален количеству вещества в единице объема. На участке (2 – 3) коэффициент наклона в два раза больше коэффициента наклона (0 – 1), т. е. при полном испарении количество вещества удвоилось.

Строим касательную к участку (0 – 1) и она пересекает вертикальную ось в точке (4). Эта касательная l_a показывает зависимость парциального давления воздуха в смеси, и так как при испарении количество вещества удвоилось, то в точке (3) давление в два раза выше, чем в точке (4). С другой стороны между точками (3) и (4) 50 вертикальных делений по 20 торр, т. е. Их разница 1000 торр, и точка (3) имеет значение давления 2000 торр, (4) – 1000 торр, а точка (0) имеет значение 500 торр. Давление в точках A и B равно 400 торр.

Так как давление в точке (4) в два раза больше давления в точке (0), то температура в точке (4) больше в два раза, чем в точке (0). Это значит, что их разница составляет $T_0 = T_4/2$, а количество маленьких делений по горизонтальной оси 200 дел.

Заметим, что разность между кривой смеси и прямой l_a дает давление насыщенных паров воды. Для воды мы знаем, что давление насыщенных паров при 100°C (373 К) равно атмосферному, т. е. по условию задачи 760 торр, таким образом, необходимо найти, в какой точке давление смеси превышает давление воздуха на 760 торр. Для этого проводим прямую l_c , параллельную прямой l_a и смещенную на 760 торр вверх, т. е. на 38 делений по вертикальной оси, т. е. проходящую через точки (5) и (6). Эта прямая пересечёт кривую смеси в точке (7), температура которой будет составлять 100°C (373 К), и будет отстоять по горизонтальной оси на расстояние 173 клеточки от точки (0). Таким образом

$$\frac{T_4 - T_0}{200} = \frac{T_0}{200} = \frac{373 - T_0}{173} \Rightarrow T_0 = 200 \text{ К} \Rightarrow T_4 = 400 \text{ К}.$$

2. Заметим, что нам необходимо найти такую температуру, при которой давление превышает давление воздуха l_a на 40% от давления паров воды, если бы она вся испарилась, но это равно 40% давления самого воздуха. Т.к. в точке (0) давление воздуха равно 500 торр, то 40% - это 200 торр. Смещаемся на 10 делений вверх в точку (8), аналогично находим точку (9). Прямая l_b , проходящая через эти точки, пересечёт кривую смеси в точке (10), температура которой составляет $(80 \pm 1)^\circ\text{C} = (353 \pm 1) \text{ К}$.

Критерии оценивания Т-10-3

1. Идея проведения касательной к началу графика как к изохоре, соответствующей сухому воздуху (на графике или аналитически) 1 балл
2. Нахождение изохоры, соответствующей смеси сухого воздуха и полностью испарившейся воде (на графике или аналитически) 1 балл
3. Идея о том, что прямые пересекаются в начале координат 1 балл
4. Нахождение численного значения давления в точках и (400 торр).
Нахождение масштаба по оси температуры 1 балл
5. Утверждение, что давление насыщенных паров при 373 К равно 1 атм 1 балл
6. Метод нахождения точки 373 К на рисунке 1 балл
7. Нахождение температур в точках (200 К) и (400 К)
(по 1 баллу за каждую) 2 балла
8. Идея, что 40% испарившейся воды соответствует 0,4 расстояния
между прямыми из пункта (1) 1 балл
9. Нахождение численного значения температуры, при которой
испарилось 40% воды (353 ± 1 К) 1 балл

Возможное решение Т-10-4

При малых напряжениях источника U диоды закрыты, конденсаторы соединены последовательно и напряжение на каждом из них $\frac{U}{3}$. Напряжения на диодах при этом равны $2\frac{U}{3}$. Если они достигают значения U_0 (т.е. при $U = 3\frac{U_0}{2}$), диоды становятся открытыми, и конденсаторы уже нельзя считать соединенными последовательно.

Пусть U_1, U_2 и U_3 – напряжения на конденсаторах при полярности, указанной на рис. 10.14 (источник не показан).

Тогда справедливы уравнения:

$$\begin{cases} U_1 + U_2 + U_3 = U \\ U_1 + U_2 = U_0 \\ U_2 + U_3 = U_0 \end{cases}$$

Откуда получаем:

$$\begin{cases} U_1 = U_3 = U - U_0 \\ U_2 = 2U_0 - U \end{cases}$$

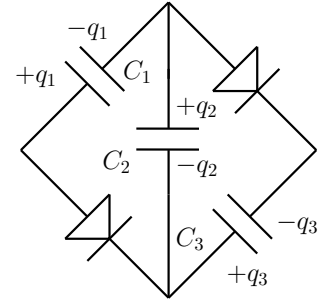


Рис. 10.14

Рассмотрим пункт 1) задачи. При $U = 3U_0$ имеем:

$$\begin{cases} U_1 = U_3 = 2U_0 \\ U_2 = -U_0 \end{cases}$$

(полярность q_2 противоположна указанной на рисунке). Через диоды прошли заряды

$$q_D = -q_2 + q_3 = CU_0 + 2CU_0 = 3CU_0,$$

при этом

$$q_1 = CU_1 = 2CU_0.$$

Значит, через источник прошел заряд

$$q_{\text{ист}} = q_1 + q_D = 5CU_0,$$

работа источника

$$A_{\text{ист}} = q_{\text{ист}}U = 15CU_0^2.$$

Энергия W_C конденсаторов при этом

$$W_C = 2 \frac{C(2U_0)^2}{2} + \frac{CU_0^2}{2} = 4,5CU_0^2.$$

Тогда количество выделившегося тепла

$$Q = A_{\text{ист}} - W_C = 10,5CU_0^2.$$

Перейдем к пункту 2). До момента времени $t = \tau/2$, пока $U \leq 3U_0/2$, напряжение на диодах меньше U_0 , а напряжения на конденсаторах равны $U/3$. При этом токи через амперметры

$$I_1 = I_2 = \frac{\Delta q_1}{\Delta t_1} = C \frac{\Delta U_1}{\Delta t} = \frac{CU_0}{\tau}$$

При $t = \tau/2$ через диоды начинает течь ток, а напряжения на конденсаторах

$$\begin{cases} U_1 = U_3 = U - U_0 \\ U_2 = 2U_0 - U \end{cases}$$

При этом токи через амперметры

$$I_2 = \frac{\Delta q_2}{\Delta t} = C \frac{\Delta(2U_0 - U)}{\Delta t} = -CC \frac{\Delta U}{\Delta t} = -\frac{3CU_0}{\tau},$$

$$I_1 = \frac{\Delta q_2}{\Delta t} + \frac{\Delta q_D}{\Delta t} = \frac{\Delta q_3}{\Delta t} - \frac{\Delta q_2}{\Delta t} = 2C \frac{\Delta U}{\Delta t} + C \frac{\Delta U}{\Delta t} = \frac{9CU_0}{\tau}.$$

При уменьшении напряжения в интервале времени от τ до 2τ ток через диоды не течет, напряжение на конденсаторах изменяется на одну и ту же величину

$$\Delta U_1 = \Delta U_2 = \Delta U_3 = -\frac{\Delta U}{3}.$$

При этом, с учетом знака напряжения U_2 , модуль U_2 возрастает. Ток тогда

$$I_1 = I_2 = \frac{\Delta q_1}{\Delta t} = C \frac{\Delta U_1}{\Delta t} = \frac{C \Delta U}{3 \Delta t} = -\frac{CU_0}{\tau}.$$

Графики зависимостей $I_1(t)$, $I_2(t)$ выглядят так:

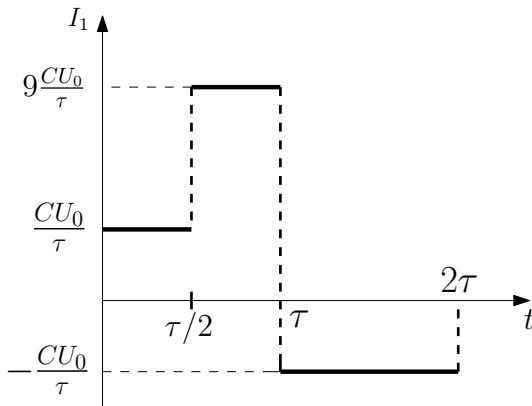


Рис. 10.15

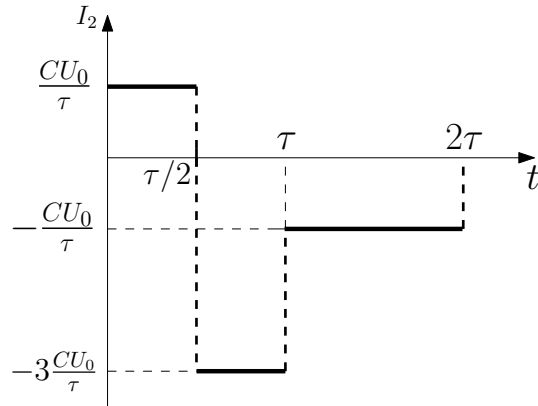


Рис. 10.16

Критерии оценивания Т-10-4

1. Найдено напряжение источника, при котором диоды открываются $U_{\text{откр}} = \frac{3}{2}U_0$ 1 балл
Вопрос 1: 2,5 балла
2. Найдены заряды на конденсаторах $q_1 = q_3 = 2CU_0, q_2 = CU_0$ 0,2+0,2+0,2 балла
3. Найден заряд, прошедший через источник $q_{\text{ист}} = 5CU_0$ 0,6 балла
4. Записан закон сохранения энергии $A_{\text{ист}} = Q + W_C$ 0,5 балла
5. Получен ответ $Q = 10,5CU_0^2$ 1 балл
Вопрос 2: 6,5 баллов
6. Указано, что при $t < \tau/2$ напряжения на конденсаторах равны 0,5 балла
7. Найдены токи $I_1 = I_2 = \frac{CU_0}{\tau}$ 0,5+0,5 балла*
8. Записана система для напряжений при $\tau/2 < t < \tau$ (или любое эквивалентное соотношение) 1 балл
9. Найдены токи $I_1 = \frac{9CU_0}{\tau}, I_2 = -\frac{3CU_0}{\tau}$ 0,5+0,5 балла*
10. Указано, что при $\tau < t < 2\tau$ ток через диоды не течет 1 балл
11. Записан закон сохранения зарядов (или любое эквивалентное соотношение) 0,5 балла
12. Найдены токи $I_1 = I_2 = -\frac{CU_0}{\tau}$ 1+1 балл*

*Комментарий: Если у тока правильное значение, но неправильный знак, то ставится на 0,2 балла меньше. Если ток не нанесен на график (или нанесен неправильно), ставится на 0,2 балла меньше.

Возможное решение Т-10-5

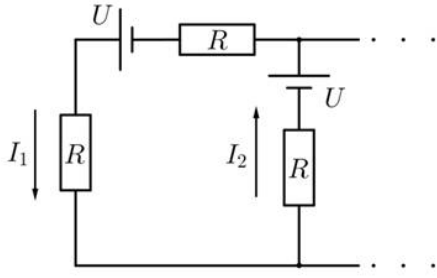


Рис. 10.17

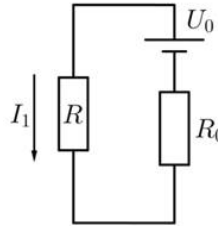


Рис. 10.18

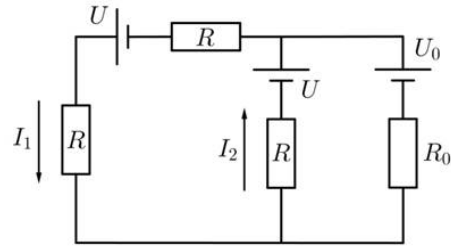


Рис. 10.19

Всю цепь омметров (рис. 10.17) можно эквивалентно (без изменения тока через резистор R) заменить идеальным источником напряжения U_0 и резистором сопротивления R_0 (рис. 10.18). Поскольку число звеньев бесконечно, то значения U_0 и R_0 не зависят от номера звена, начиная с которого производится замена. Тогда эта же схема эквивалентна приведенной на рис. 10.19. Для нахождения U_0 и R_0 воспользуемся формулами последовательного и параллельного соединения источников:

$$U_0 = U + \left(\frac{U}{R} + \frac{U_0}{R_0} \right) \frac{RR_0}{R + R_0},$$

$$R_0 = \frac{RR_0}{R + R_0} + R.$$

Отсюда находим:

$$U_0 = \frac{(3 + \sqrt{5})U}{2}, \quad R_0 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}R.$$

Тогда сила тока, протекающего через внешний резистор,

$$I_1 = \frac{U_0}{R_0 + R} = \frac{U(3 + \sqrt{5})}{2(R + R\frac{1 + \sqrt{5}}{2})} = \frac{U}{R}.$$

Показание первого омметра

$$R_1 = \frac{U}{I_1} - R = 0.$$

Показание второго омметра находим, применив закон Кирхгофа для контура с внешним резистором и первыми двумя омметрами

$$2U = 2I_1R + I_2R.$$

Тогда

$$I_2R = 2(U - I_1R) = 0.$$

Оказывается, что сила тока I_2 , текущего через второй омметр равна нулю. Следовательно,

$$R_2 = \frac{U}{0} - R = \infty.$$

В следующих ветвях все повторяется. Нечетные омметры показывают ноль, четные – бесконечность, поэтому $R_1 = R_{13} = 0, R_4 = \infty$.

Критерии оценивания Т-10-5

1. Записано уравнение для определения U_0 2 балла
2. Записано уравнение для определения R_0 2 балла
3. Найдены параметры источника 0,5+0,5 балла
4. Найдена сила тока через резистор 1 балл
5. Найдены показания первого омметра 0,5 балла
6. Записано уравнение для определения силы тока через второй омметр 1 балл
7. Найдена сила тока через второй омметр 0,5 балла
8. Показано, что сила тока через все четные/нечетные
омметры одинакова 0,5+0,5 балла
9. Приведены показания четвертого и тринадцатого омметров 0,5+0,5 балла