

11 класс

Первый день

- 11.1. Число x таково, что обе суммы $S = \sin 64x + \sin 65x$ и $C = \cos 64x + \cos 65x$ — рациональные числа. Докажите, что в одной из этих сумм оба слагаемых рациональны.
- 11.2. Остроугольный равнобедренный треугольник ABC ($AB = AC$) вписан в окружность с центром в точке O . Лучи BO и CO пересекают стороны AC и AB в точках B' и C' соответственно. Через точку C' проведена прямая ℓ , параллельная прямой AC . Докажите, что прямая ℓ касается окружности, описанной около треугольника $B'OC$.
- 11.3. На доске выписаны в ряд n положительных чисел a_1, a_2, \dots, a_n . Вася хочет выписать под каждым числом a_i число $b_i \geq a_i$ так, чтобы для любых двух из чисел b_1, b_2, \dots, b_n отношение одного из них к другому было целым. Докажите, что Вася может выписать требуемые числа так, чтобы выполнялось неравенство $b_1 b_2 \dots b_n \leq 2^{(n-1)/2} a_1 a_2 \dots a_n$.
- 11.4. У фокусника и помощника есть колода с картами; одна сторона («рубашка») у всех карт одинакова, а другая окрашена в один из 2017 цветов (в колоде по 1000000 карт каждого цвета). Фокусник и помощник собираются показать следующий фокус. Фокусник выходит из зала, а зрители выкладывают на стол в ряд $n > 1$ карт рубашками вниз. Помощник смотрит на эти карты, а затем все, кроме одной, переворачивает рубашкой вверх, не меняя их порядка. Затем входит фокусник, смотрит на стол, указывает на одну из закрытых карт и называет её цвет. При каком наименьшем n фокусник может заранее договориться с помощником так, чтобы фокус гарантированно удался?