IX/X.3 ПЛАНЕТНОЕ ТРИО

О.С. Угольников

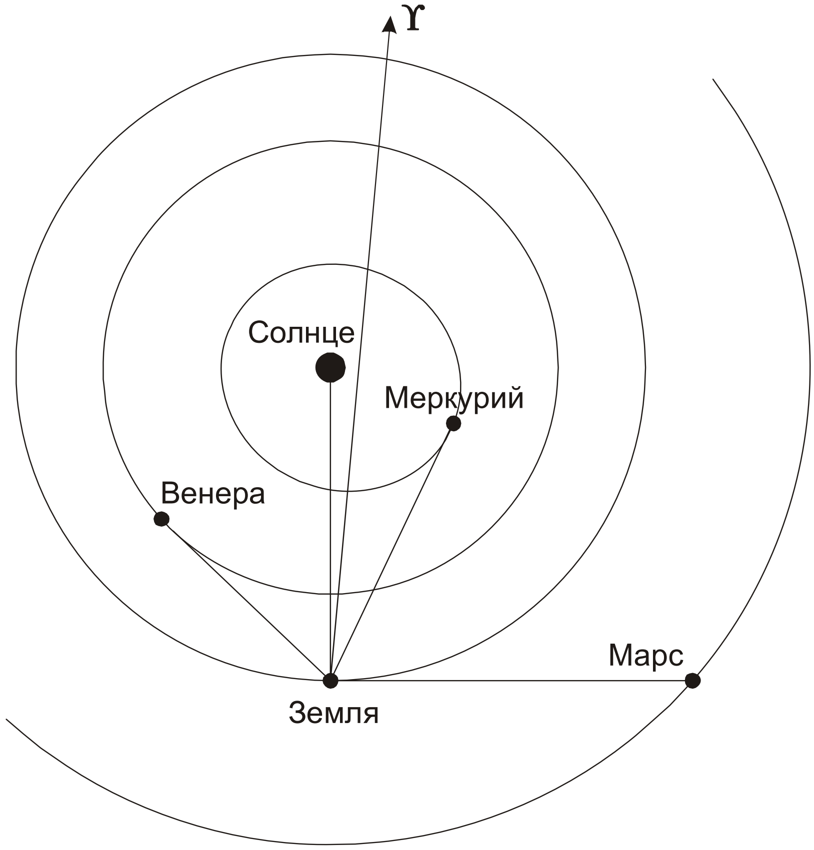
Условие. В таблице приведены экваториальные координаты Меркурия, Венеры и Марса на Земле в некоторый момент времени. Считая орбиту Марса круговой, определите его угловой диаметр в этот момент.

Планета	Прямое восхождение, α	Склонение, δ
Меркурий	22ч33.2м	–10° 27′
Венера	03ч06.0м	+20° 34′
Марс	18ч15.7м	–23° 32′

Решение. Казалось бы, задачу нельзя решить, не зная текущую конфигурацию Марса, зависящую от неизвестного положения Солнца. Однако мы можем подметить интересную особенность – внутренние планеты, Меркурий и Венера, располагаются необычно далеко друг от друга. Они находятся вблизи эклиптики по разные стороны от экватора, и угловое расстояние между ними можно найти по теореме Пифагора:

$$\lambda_{MV} = \sqrt{(\alpha_V - \alpha_M)^2 + (\delta_V - \delta_M)^2} = 75^O.$$

Здесь прямое восхождение Меркурия α_M уменьшено на 24 часа. Угловое расстояние между планетами равно сумме их максимальных элонгаций от Солнца: 28° для Меркурия и 47° для Венеры. Такое может быть, только если одновременно наступила наибольшая западная элонгация Меркурия (28°) и наибольшая восточная элонгация Венеры (47°). В этом случае мы можем найти положение Солнца на небе достаточно простым образом:



$$\alpha_0 = \alpha_M + \frac{28}{75}(\alpha_V - \alpha_M) = 0ч\,15м;$$

$$\delta_0 = \delta_M + \frac{28}{75}(\delta_V - \delta_M) = +0^O 45'.$$

Планеты не находятся точно на эклиптике, сделанные расчеты приближенные, поэтому положение Солнца также не попало точно на эклиптику. Главный вывод, который можно сделать по прямому восхождению Солнца – оно находится в 90° к востоку от Марса, и последний находится в западной квадратуре. Считая его орбиту круговой (орбита Земли тоже близка к окружности), определяем угловой диаметр планеты:

$$d = \frac{D}{\sqrt{a^2 - a_0^2}} = 4 \cdot 10^{-5}\ \ рад = 8''.$$

Здесь a и a_0 – радиусы орбит Марса и Земли, D – физический диаметр Марса.

Система оценивания (от одного члена жюри).

1 этап: 2 балла.
Определение углового расстояния между Меркурием и Венерой. Это можно делать как точно, так и приближенно, проецируя участок небесной сферы на плоскость.
2 этап: 2 балла.
Вывод о том, что Меркурий и Венера находятся в противоположных наибольших элонгациях.
3 этап: 1 балл.
Определение положения Солнца на небе (приближенно) в данный момент.
4 этап: 1 балл.
Вывод о квадратуре Марса либо вычисление его углового расстояния от Солнца.
5 этап: 2 балла.
Вычисление углового диаметра Марса.

Если участник сразу необоснованно пишет, что Марс располагается в квадратуре, то засчитаны могут быть только 4 и 5 этапы, и наибольшая оценка за все решение не может быть больше 3 баллов.

Возможный альтернативный подход к решению: участник олимпиады может определить диапазон возможных угловых расстояний Марса от Солнца, исходя из углового расстояния между Марсом и Меркурием, а потом провести такой же анализ, исходя из углового расстояния между Марсом и Венерой. Пересечение этих интервалов дает узкое множество возможных значений углового расстояния между Марсом и Солнцем около 90°. При условии верного выполнения такое решение засчитывается в полной мере.

Возможная ошибка при решении: максимальная элонгация Меркурия определяется в предположении его круговой орбиты и составляет 23°. Из этого делается вывод, что Меркурий и Венера не могут быть так далеко на небе друг от друга, и задание решения не имеет. В этом случае выставляется только 2 балла за первый этап решения.

IX/X.6 К НОВЫМ ГОРИЗОНТАМ

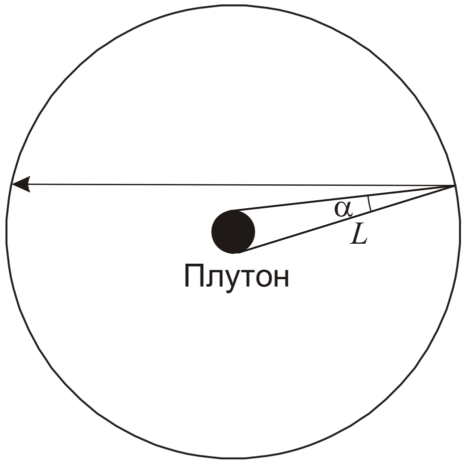
С.Г. Желтоухов

Условие. Когда межпланетная станция New Horizons пролетала около Плутона (радиус 1190 км) на расстоянии 33 а.е. от Солнца, угловой диаметр Плутона был больше одного градуса всего около 5 часов. В середине этого интервала угловой диаметр Плутона достиг 10°. Сможет ли эта межпланетная станция вылететь из Солнечной системы? Оцените, за какое время станция долетит до орбиты тела 2014 MU69, если радиус этой орбиты равен 44 астрономическим единицам. Орбиту этого тела можно считать круговой.

Решение. Определим расстояние L, с которого Плутон виден как диск с угловым диаметром α:

$$L = \frac{2R}{sin\alpha} = 135000 \text{ км.}$$

Если считать траекторию аппарата около Плутона прямой, проходящей вблизи Плутона (на это указывает большой угловой диаметр в середине интервала), а его скорость v – постоянной, то она будет равна $2L/t$ = 54000 км/ч или 15 км/с. Это существенно больше второй космической скорости даже на поверхности Плутона. Поэтому мы можем считать, что притяжение самого Плутона не оказало существенного влияния на скорость аппарата.



Сравним теперь полученную скорость (относительно Плутона) со скоростью движения по параболической орбите на таком расстоянии от Солнца a_1 (выраженном в астрономических единицах):

$$v_1 = v_0\sqrt{\frac{2}{a_1}} = 7.3\ \textit{км}/\text{с}.$$

Здесь v_0 – круговая скорость на орбите Земли. Полученная скорость вдвое меньше скорости "Новых Горизонтов". Вне зависимости от направления движения относительно Плутона гелиоцентрическая скорость аппарата больше второй космической, и он может покинуть Солнечную систему.

Обратим внимание, что аппарат, имея столь высокую скорость, прилетел из внутренних областей Солнечной системы, с Земли. Следовательно, аппарат движется вблизи Плутона в направлении, близком к радиальному (от Солнца), перпендикулярно движению самого Плутона. Его гелиоцентрическая скорость мало отличается от плутоно-центрической и близка к v. Движение от Плутона к астероиду 2014 MU69 будет происходить по прямой линии с практически постоянной скоростью. Это займет время

$$t = \frac{a_2 - a_1}{v} = 3.5\ \textit{года.}$$

Система оценивания (от одного члена жюри).

1 этап: 2 балла.
Определение расстояния, с которого Плутон имеет заданные угловые размеры.
2 этап: 2 балла.
Определение скорости аппарата относительно Плутона. В случае ошибки в 2 раза, вызванной путаницей радиусов и диаметров, эти 2 балла не выставляются, но дальнейшее решение оценивается в полной мере. Предположение, что аппарат летел по хорде в случае правильного вычисления длины хорды оценивается в полной мере.
3 этап: 1 балл.
Вывод о том, что аппарат сможет покинуть Солнечную систему.
4 этап: 1 балл.
Вывод о радиальном направлении скорости аппарата. Если этот вывод не делается, то данный балл не выставляется даже при последующем верном решении.
5 этап: 2 балла.
Расчет времени перелета аппарата к астероиду 2014 MU69.

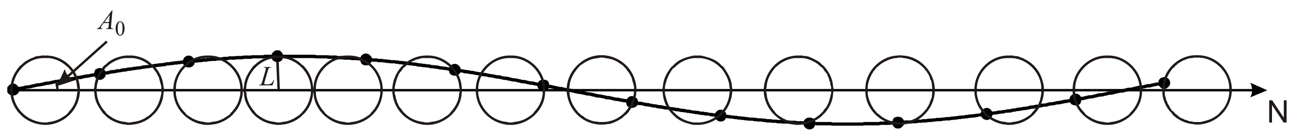
X.1 ПУТЕВОДНАЯ ЗВЕЗДА

О.С. Угольников

Условие. Океанский корабль движется в сторону севера, пересекая параллель +60° с.ш. Капитан корабля держит курс точно на Полярную звезду, забыв о том, что она не находится точно в Северном полюсе мира (склонение звезды на текущую эпоху +89°20′). Каково максимальное смещение корабля (в км) от прямолинейного курса (меридиана), если его скорость равна 30 км/ч? Считать, что оптические приборы на борту позволяют видеть Полярную звезду даже днем.

Решение. Полярная звезда не находится точно в Северном полюсе мира и описывает вокруг него суточный круг с радиусом ρ, равным 40′. Центр этого круга располагается на высоте φ=60°, на альмукантарате с длиной, вдвое меньшей горизонта (большого круга небесной сферы). Поэтому азимут Полярной звезды изменяется практически синусоидально с периодом в звездные сутки T и амплитудой A_0 (отклонением от севера) в $\rho/\cos\varphi$ = 80′. В момент, когда азимут отличается от северного на эту величину, у скорости корабля появляется компонента, направленная вдоль параллели, и равная

$$v_P = v \sin A_0 = 0.70 \text{ км/ч.}$$



Здесь v – полная скорость корабля. Он идет по синусоиде, и этот путь можно представить как наложение прямолинейного и слегка неравномерного движения на север и вращения по кругу со скоростью v_P и периодом T. Максимальное отклонение корабля от курса есть радиус этого круга:

$$L = \frac{v_P T}{2\pi} = \frac{v \sin A_0 T}{2\pi} \approx \frac{v\rho T}{2\pi \cos\varphi} = 2.7 \text{ км.}$$

Система оценивания (от одного члена жюри).

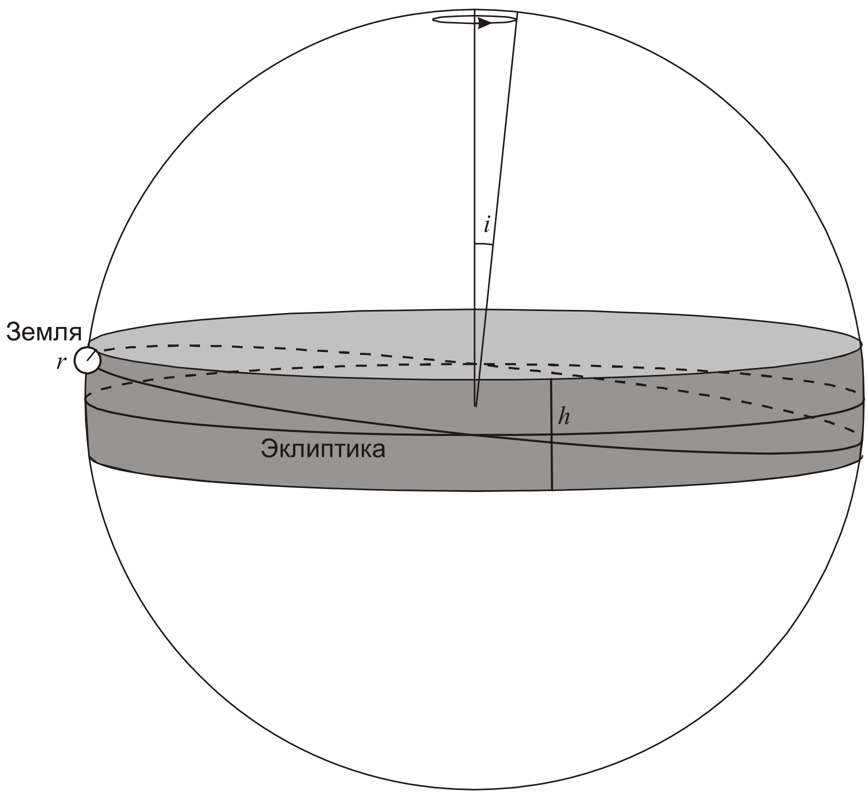
1 этап: 3 балла.
Определение максимального отклонения азимута Полярной звезды от направления на север. Это оценивается в 3 балла. Если при этом не учитывается фактор cos φ с итоговой ошибкой в 2 раза, данные 3 балла не выставляются, но оставшееся решение оценивается в полной мере.
2 этап: 2 балла.
Определение максимальной величины компоненты скорости корабля перпендикулярно меридиану.
3 этап: 3 балла.
Вычисление максимального отклонения от прямолинейного курса. Второй и третий этапы могут выполняться вместе без промежуточных численных выводов. Может использоваться как «модель круга», так и прямой анализ синусоидального движения.

X.2 ЛУННЫЙ ЗВЕЗДНЫЙ КАТАЛОГ

О.С. Угольников

Условие. На стационарной лунной обсерватории будущего проводится изучение атмосферы Земли на основе спектроскопии звезд у земного лимба. Для этой цели создан каталог звезд ярче 6^m, которые могут покрываться Землей при наблюдении из этой обсерватории. Оцените количество звезд в этом каталоге.

Решение. Перечислим все факторы, которые будут влиять на размер области неба, которая может быть покрыта Землей при наблюдении с лунной обсерватории. Земля имеет значительный угловой размер (максимально возможный радиус *r* около 1.02°) и движется относительно звезд вдоль линии пересечения небесной сферы и плоскости орбиты системы Земля-Луна. Ось этой линии наклонена на угол *i* (5.15°) к оси эклиптики и вращается вокруг нее с периодом 18.6 лет. Таким образом, Земля в своем движении заметает пояс вдоль эклиптики шириной



$$h = 2\,(i + r) \sim 12.3°.$$

Мы не учитываем здесь параллактический сдвиг Земли, зависящий от положения точки на Луне, так как за счет синхронного осевого вращения Луны этот сдвиг будет почти постоянным и приведет только к смещению серой области на рисунке как единого целого. Влияние лунных либраций будет исчисляться несколькими сотыми градуса, что можно не учитывать. Если лунная обсерватория установлена вдали от полюсов, то в разные моменты времени с нее будут доступны все участки области небесной сферы, которые могут быть покрыты Землей. Определим отношение площади данной области и всего неба:

$$\eta = \frac{2\pi R^2 h}{4\pi R^2} = \frac{h}{2} \approx 0.107.$$

Если считать, что 6000 звезд ярче 6^m распределены по небесной сфере равномерно (это можно делать, так как эклиптика образует большой угол с Млечным путем), то в данный каталог должно войти около 650 звезд.

Система оценивания (от одного члена жюри).

1 этап: 5 баллов.
Указание факторов, определяющих размер области неба, покрываемой Землей: прецессии плоскости орбиты системы Земля-Луна ($2i$ = 11.3°, 3 балла) и видимые размеры Земли ($2r$ = 2.0°, максимальные или средние, 2 балла). Не-учет фактора 2 на каждом из этапов уменьшает оценку на 1 балл. Если вместо угла (i+r) участники берут близкую величину либрации Луны по широте (около 7°), оценка уменьшается на 2 балла, так как на либрацию влияет также наклон оси вращения Луны к плоскости ее орбиты, а на покрытиях звезд он не сказывается. Если участники олимпиады дополнительно учитывают параллактическое смещение Земли за счет либраций (2*0.03°) – это не изменяет оценку, если же они берут полный параллакс (2*0.25°) – оценка уменьшается на 2 балла, так как при наблюдении из фиксированной точки Луны параллактическое смещение Земли практически постоянно. Неточности, допущенные на первом этапе, не являются основанием для снижения оценки на последующих этапах, если там не сделаны дополнительные ошибки.
2 этап: 2 балла.
Определение доли небесной сферы, где могут происходить покрытия. Эту долю участники могут считать как цилиндром, так и фрагментом сферы.
3 этап: 1 балл.
Определение числа звезд в каталоге. Необходимо принимать во внимание, что это лишь примерная оценка, участники могут брать несколько различающиеся значения общего числа ярких звезд на небе (5500-6500).

X.4 ЗВЕЗДА В ЗЕНИТЕ

О.С. Угольников

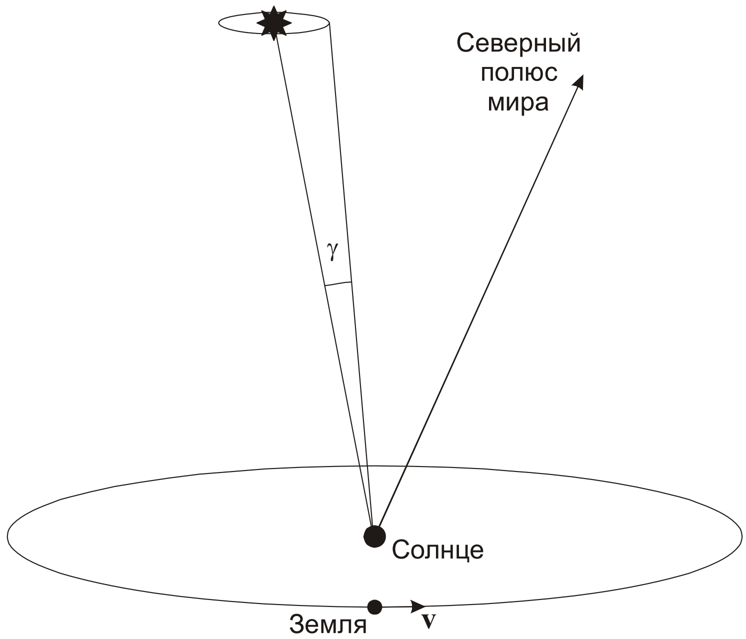
Условие. В какой сезон и в какое местное (среднее солнечное) время звезда Грумиум (ξ Дракона) может оказаться точно в зените в точке России с координатами 56°52′00″ с.ш., 30°00′00″ в.д.? Склонение звезды на эпоху 2017 года равно +56°52′13″, прямое восхождение считать равным точно 18ч. Эксцентриситетом орбиты Земли, уравнением времени, прецессией, нутацией, параллаксом и собственным движением звезды пренебречь.

Решение. Мы видим, что склонение звезды немного отличается от широты места наблюдения. Тем не менее, звезда может попасть в зенит, так как ее положение на небе смещается за счет аберрации света – явление, вызванного орбитальным движением Земли. Аберрационное смещение звезды направлено к точке неба, к которой движется Земля в настоящий момент. В общем случае (вообще говоря, не требующемся для решения данной задачи) величина аберрационного смещения в радианах равна

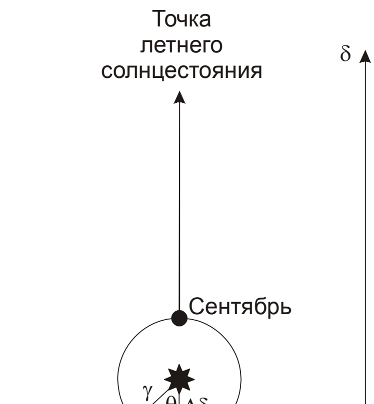
$$\gamma = v \sin\theta / c,$$

где v – орбитальная скорость Земли, c – скорость света, θ – угол между скоростью и направлением на звезду. Величина аберрации максимальна, когда движение нашей планеты происходит перпендикулярно направлению на звезду. Для указанной в условии задачи звезды Грумиум близкая к этому ситуация наблюдается постоянно, так как эта звезда располагается недалеко от северного полюса эклиптики (прямое восхождение 18ч, склонение +66.6°), угол θ всегда не меньше 80°, а его синус – не меньше 0.985. В этом случае звезда описывает на небе за год круг, а величина аберрации составляет

$$\gamma = v/c = 10^{-4}\ \text{рад} \sim 20''.$$



В день осеннего равноденствия, когда орбитальная скорость Земли направлена вдоль плоскости меридиана в направлении точки летнего солнцестояния (рисунок), аберрационное смещение направлено на север. В день весеннего равноденствия видимое положение звезды смещается на юг. Склонение звезды на Δδ=13″ больше широты места наблюдения, и аберрация должна сместить ее на юг на эту величину.



Из рисунка видно, что условие задачи будет выполнено, если положение звезды на круге аберрации (и Земли на орбите) будет отстоять от положения, соответствующего весеннему равноденствию, на угол

$$\theta = \arccos\frac{\Delta\delta}{\gamma} \approx 50^{\circ} = 3ч20м.$$

Это происходит примерно за 51 день до и после весеннего равноденствия, то есть около 30 января и 10 мая. Если пренебречь уравнением времени, то звездное время в среднюю полночь S в эти дни равно $180 \pm 50°$ или 12ч ± 3ч20м (январю соответствует знак "–", маю – знак "+"). Местное время верхней кульминации данной звезды в зените соответствует звездному времени, равному ее прямому восхождению α (его изменением за счет аберрации мы пренебрегаем) и равно

$$T = \alpha - S = 9м20м \text{ или } 2ч40м.$$

Система оценивания (от одного члена жюри).

1 этап: 1 балл.
Указание аберрации света как причины изменения видимых экваториальных координат звезды.
2 этап: 1 балл.
Правильное указание величины аберрационного смещения звезды как известного, либо его получение на основе значения орбитальной скорости Земли.
3 этап: 2 балла.
Правильное указание направления сдвига звезды за счет аберрации в разные сезоны года, описанное явно или следующее из решения. Если направление отличается от правильного на значительный угол (90°, 180°), за 3 этап выставляется 0 баллов, но последующие этапы оцениваются в полной мере при условии их корректного выполнения.
4 этап: 2 балла.
Указание двух сезонов (каждый – по 1 баллу), в которые возможна кульминация звезды в зените. Учет изменения прямого восхождения звезды за счет аберрации на оценку не влияет.
5 этап: 2 балла.
Определение местного времени кульминации звезды в каждый из этих сезонов (по 1 баллу).

Возможная ошибка при решении: игнорирование явлением аберрации и вывод, что звезда в зенит не попадает. Оценка в этом случае составляет 1 балл.

X/XI.5 ОСКОЛКИ ЛУНЫ

Е.Н. Фадеев, О.С. Угольников

Условие. Враждебные инопланетяне разрушили Луну, превратив ее в огромное количество шарообразных осколков диаметром 10 м. Все эти тела стали двигаться, равномерно заполнив пространство вокруг Земли между сферами размером с перигей и апогей лунной орбиты. Оцените концентрацию этих осколков и звездную величину всей полусферы ночного неба на Земле. Влиянием земной атмосферы пренебречь. Считать все осколки одинаковыми, а их плотность и оптические свойства аналогичными самой Луне.

Решение. Ответим сначала на первый вопрос задачи. Пусть R – радиус Луны (1738 км), а r – радиус осколка (5 м). Объем Луны составляет $(4/3)\pi R^3$, Объем осколка – $(4/3)\pi r^3$. Поскольку объем всех осколков равен объему Луны, полное число этих тел равно

$$N = (R/r)^3 = 4.2 \cdot 10^{16}.$$

Пространство, заполненное осколками, представляет собой сферический слой со средним радиусом D (среднее расстояние от Земли до Луны) и толщиной $2De$ (e - эксцентриситет орбиты Луны), толщина существенно меньше радиуса. Объем этой области равен

$$V = 4\pi D^2 \cdot 2De = 8\pi D^3 e = 7.8 \cdot 10^{16} \text{ км}^3.$$

Концентрация осколков $n=N/V\sim 0.55$ км$^{-3}$. Если мы возьмем предельные значения расстояния Луны в перигее и апогее из справочных данных, то мы получим несколько большее значение объема ($9.2\cdot 10^{16}$ км^3) и концентрации (0.45 км$^{-3}$).

Теперь нужно выяснить, какую яркость ночного неба будут создавать эти осколки. Казалось бы, мы можем достаточно просто решить эту задачу, определив яркость каждого осколка и умножив ее на число осколков видимых на небе. Луна и все осколки находятся на примерно одинаковом расстоянии от наблюдателя. Обозначив яркость Луны как J_0, получаем, что яркость одного осколка есть

$$j = Jr^2/R^2.$$

Из любой точки Земли будет видна примерно половина всех осколков. Их суммарная яркость составит

$$J = (N/2)\, j = JR/2r.$$

Соответствующая звездная величина будет равна

$$m = m_0 - 2.5 \lg (JR / 2r) = m_0 - 13.1.$$

Сам по себе этот ответ уже вызывает удивление: небо оказывается очень ярким. Действительно, среднюю звездную величину Луны можно взять для фазы, близкой к первой или последней четверти, а можно определить, зная ее сферическое альбедо A:

$$m_0 = M_0 - 2.5\lg\frac{\pi R^2 A}{4\pi D^2} = M_0 - 2.5\lg\frac{R^2 A}{4D^2} = M_0 + 16.1 = -10.6.$$

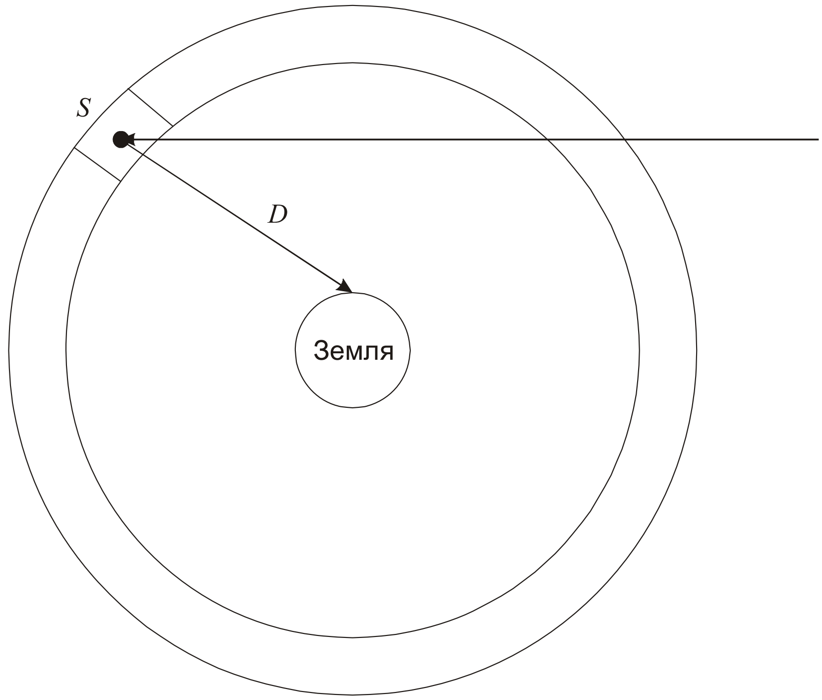
Выходит, что при сферическом альбедо 0.07 небо должно иметь величину -23.7^m, то есть всего на 3^m или в 16 раз слабее Солнца! Мысленно предположив большее альбедо (порядка единицы) и возможность наблюдения всей сферы из осколков, мы получим, что они светили бы ярче Солнца, чего не может быть (в реальности, даже при альбедо, равном единице, вся равномерно рассеивающая сфера не может светить ярче 1/4 от яркости Солнца).

Причина противоречия в том, что мы не учли высокую оптическую плотность слоя осколков. Умножим площадь, на которой осколок задерживает излучение (πr^2) на число осколков (R^3/r^3), и разделим это на площадь всей сферы:

$$\tau = \frac{\pi r^2 R^3}{r^3 4\pi D^2} = \frac{R^3}{4rD^2} = 1.8.$$

Полученная величина есть среднее количество осколков на пути луча, идущего перпендикулярно к слою (фактически, его оптическая толщина). Даже в этом случае осколки будут в заметной степени затенять друг друга. С другой стороны, коль скоро это число порядка единицы, значительное число света будет рассеиваться осколками и попадать к наблюдателю.

Точный расчет яркости сферы представляет собой достаточно сложную задачу, однако это можно сделать приближенно. Приведем один из наиболее простых и при этом эффективных способов. Рассмотрим одну из возможных траекторий луча света от Солнца к какому-либо осколку и далее к Земле.



Путь луча до осколка может быть разным, он может проходить через слой один или два раза с существенно разной длиной. Так как нас интересует полная яркость небесной полусферы, будем считать, что каждый равный элемент площади сферы S рассеивает одинаковое количество солнечного излучения. Будем считать, что вся солнечная энергия, попадающая на сферу, задерживается или рассеивается в ней (оптическая толщина по диаметру не менее 3.6, по хорде – еще больше). Сфера площадью $4\pi D^2$ за единицу времени задерживает $\pi D^2 \cdot J_0$ солнечной энергии (J_0 – плотность потока солнечного излучения на расстоянии Земли). 7% этой энергии рассеивается в окружающее пространство. Плотность потока энергии от элемента сферы с площадью S на Земле будет равна

$$j_S = J_0 \pi D^2 \frac{S}{4\pi D^2} \cdot \frac{A}{4\pi D^2} \cdot e^{-\tau/2}.$$

Последний множитель выражает ослабление излучения в сфере уже после рассеяния, средний путь через сферу при этом равен половине ее толщины. Суммируя все элементы с площадью S по полусфере, получаем общую плотность потока излучения от нее на Земле:

$$j = j_S \cdot \frac{2\pi D^2}{S} = J_0 \frac{A}{8} e^{-\tau/2}.$$

Переведем это в звездные величины:

$$m = M_0 - 2.5\lg\left(\frac{A}{8} e^{-\tau/2}\right) = M_0 - 2.5\lg\left(\frac{A}{8}\right) + \frac{1.08\tau}{2} = M_0 + 6.1 = -20.7.$$

Несмотря на большую оптическую плотность сферы, небо все равно остается достаточно ярким. Конечно, здесь мы не учли, что эта яркость будет существенно меньше в областях неба вдали от Солнца, но и там засветка останется значительной. Если говорить об астрономических наблюдениях, то они будут затруднены также тем, что сфера будет блокировать излучение далеких объектов.

Система оценивания (от одного члена жюри).

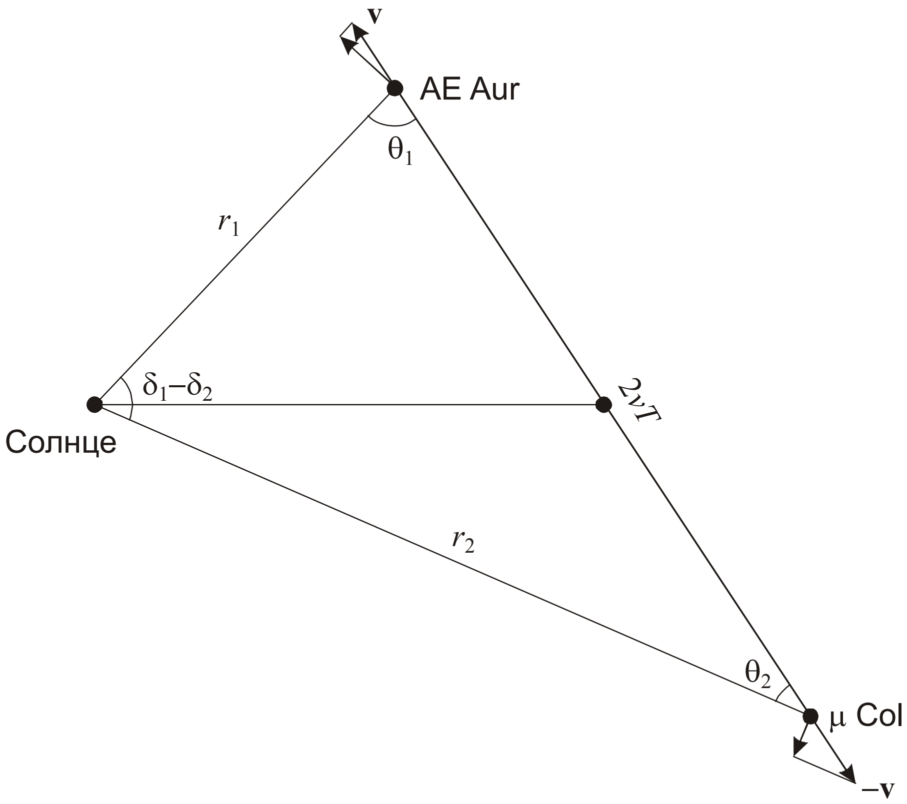
1 этап: 2 балла.
Определение концентрации осколков в слое.
2 этап: 1 балл.
Указание, что осколки будут затенять свет Солнца друг от друга, а также накладываться друг на друга при наблюдении с Земли.
3 этап: 3 балла.
Создание модели расчета звездной величины неба в условиях взаимного затенения осколков. Модель может отличаться от предложенной выше, оценка определяется ее адекватностью.
4 этап: 2 балла.
Расчет звездной величины неба.

Вероятная ошибка при решении: Расчет звездной величины одного осколка, за которым следует прямой переход ко всей небесной полусфере с известным числом осколков, без учета эффекта затенения. В этом случае может быть выставлено 2 балла за первый этап и 2 балла за четвертый этап, с максимальной суммарной оценкой 4 балла. Если при этом не учитывается эффект фазы, и все осколки считаются полностью освещенными (с итоговым ответом около -25.8^m), то общая оценка уменьшается до (2+1)=3 баллов.

Решение. В соответствии с условием задачи, звезды имеют сходное прямое восхождение и движутся на небе в противоположные стороны вдоль одного круга склонения. Самый простой, но при этом не вполне точный способ определить время с момента разлета звезд – предположить, что собственное движение за это время не менялось. Тогда решение находится элементарно:

$$\tilde{T} = \frac{\delta_2 - \delta_1}{\mu_2 - \mu_1} = \frac{1^O}{0.001''} \textit{ лет} = 3.6 \textit{ млн лет.}$$

Однако, сделанное при этом предположение, вообще говоря, противоречит условию задачи. Очевидно, что в момент разлета звезды имели собственные движения, равные по модулю и противоположные по знаку. Как видно из таблицы, в настоящий момент это не так, следовательно, собственные движения успели измениться. Изобразим положение звезд на рисунке в плоскости, содержащей Солнце и линию, соединяющую звезды:



По условию задачи, звезды разлетаются в пространстве вдоль одной прямой со скоростями v и $-v$ и к моменту наблюдений разошлись на расстояние $2vT$, где T – возраст звезд. Обозначим через $r_{1,2}$ текущие расстояния до звезд. Собственные движения (угловые скорости) звезд равны

$$\mu_1 = \frac{v \sin\theta_1}{r_1}; \quad \mu_2 = -\frac{v \sin\theta_2}{r_2}.$$

Рассмотрим треугольник "Солнце – AE Aur – μ Col". Из теоремы синусов имеем:

$$\frac{2vT}{\sin(\delta_1 - \delta_2)} = \frac{r_1}{\sin\theta_2} = \frac{r_2}{\sin\theta_1}.$$

Подставим в последнюю формулу выражение для синусов углов из определения собственного движения:

$$\frac{2vT}{\sin(\delta_1-\delta_2)} = -\frac{vr_1}{r_2\mu_2} = \frac{vr_2}{r_1\mu_1}.$$

Возведем в квадрат первое из трех равных выражений и перемножим два других:

$$\frac{4v^2T^2}{\sin^2(\delta_1-\delta_2)} = -\frac{v^2}{\mu_1\mu_2}.$$

Отсюда получаем выражение для интервала времени с момента разлета звезд:

$$T = \frac{\sin(\delta_1-\delta_2)}{2\sqrt{-\mu_1\mu_2}} = 3.0 \textit{ млн лет.}$$

Знак "–" под квадратным корнем не должен смущать, так как собственные движения звезд имеют разные знаки. Звезды очень молодые, что естественно, так как обе являются горячими сверхгигантами со светимостью в несколько десятков тысяч светимостей Солнца. По координатам мы можем видеть, что точка их рождения находится вблизи туманности Ориона. Данные две звезды являют собой классический пример так называемых "звезд-беглецов", получивших сильные противоположные импульсы в результате взаимодействия с другими звездами этой ассоциации, вероятнее всего – с компонентами двойной системы ι Ориона.

Система оценивания (от одного члена жюри).

1 этап: 6 баллов.
Правильная двумерная геометрическая картина взаимного расположения и движения двух звезд относительно Солнца, учет изменения их собственного движения с момента разлета.
2 этап: 4 балла.
Вычисление времени, прошедшего с момента разлета звезд.
3 этап: 2 балла.
Вывод о происхождении звезд в Туманности Ориона.

Возможная ошибка при решении: участники могут найти время с момента разлета по первой формуле решения, предполагая постоянство собственных движений. В этом случае первый этап решения не засчитывается, второй и третий оцениваются, исходя из точности выполнения. Максимальная оценка может составить 6 баллов.

Возможная ошибка при решении: участники отмечают, что скорости звезд не перпендикулярны направлению к наблюдателю, но время оценивают в модели постоянных собственных движений. В этом случае суммарная оценка за 1-2 этапы (при отсутствии ошибок) не превосходит 6 баллов.

X.2 СУМЕРКИ НА ТИТАНЕ

О.С. Угольников

Условие. Перед Вами фотография, сделанная с борта АМС "Кассини" (негатив). На ней видны три спутника Сатурна – Титан, Мимас и Рея. Оцените по фотографии длительность сумерек (в земных часах) на экваторе Титана.

2. Решение. В условии задачи не сказано, на каком расстоянии от каждого из спутников находилась АМС "Кассини" в момент съемки, поэтому видимые поперечники спутников не соответствуют их реальным размерам. Тем не менее, мы можем сразу указать на фотографии Титан – наличие у него атмосферы приводит к большей толщине серпа и эффекту "удлинения рогов" серпа, которого нет у Реи (слева сверху) и Мимаса (внизу). Обратим внимание, что у Титана данный эффект значительно сильнее, чем у Венеры по наблюдениям с Земли, и вообще оказывается самым сильным среди тел Солнечной системы с атмосферами, что будет объяснено далее.

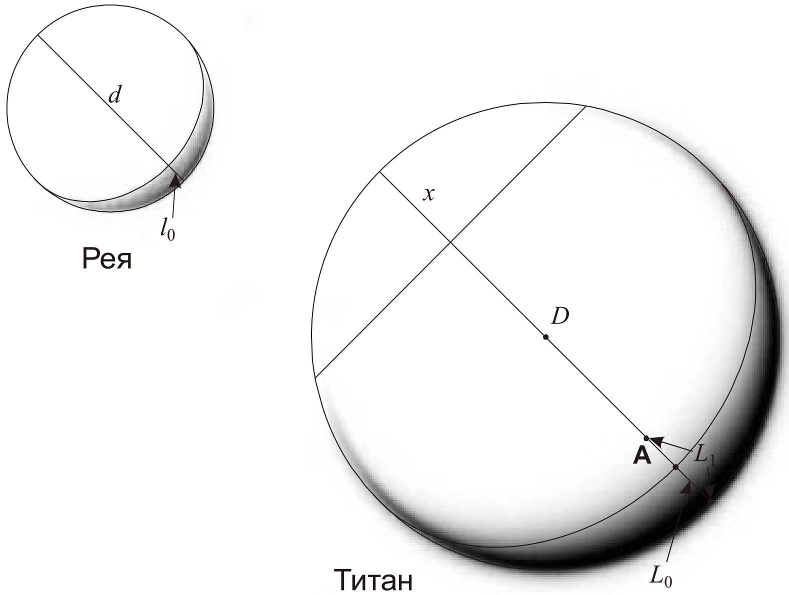
Так как Солнце располагается от точки съемки несравнимо дальше всех трех спутников, то при отсутствии атмосферы их фазы должны быть одинаковы, а рога серпов направлены в одну сторону. О форме серпа в этом случае лучше всего судить по спутнику Рея. По фотографии можно определить величину фазы Реи (см. рисунок):

$$F_0 = \frac{l_0}{d} \approx 0.1.$$

Если бы фаза Титана была такой же, видимая толщина составляла $L_0 = DF_0$ (показана на рисунке). В реальности серп имеет толщину L_1 и фазу

$$F = \frac{L_1}{D} \approx 0.2.$$

Очевидно, что фазу можно измерить лишь приближенно, однако, как мы увидим далее, более точные измерения для решения задачи и не требуются. Расстояние от аппарата до Реи и Титана много больше их размеров, поэтому мы можем считать, что с аппарата видна ровно половина поверхности этих спутников.



У Титана освещено не только дневное полушарие, но и сумеречное кольцо. Определим максимальное погружение Солнца под горизонт, при котором мы еще видим рассеянное в атмосфере излучение (см. рисунок). Этот угол можно найти по формуле:

$$\gamma_1 = \arccos\frac{R-L_1}{R} - \arccos\frac{R-L_0}{R} = \arccos(1-2F_1) - \arccos(1-2F_0) = 16^{\circ}.$$

Здесь R – радиус Титана ($D/2$). Мы можем сразу отметить, что этот угол явно больше, чем у Земли, так как на нашей планете погружение Солнца под горизонт на 16° соответствует поздней стадии астрономических сумерек, во время которых освещенность несравнимо меньше, чем днем.

Другой способ оценки того же угла – по удлинению рогов серпа Титана. Мы можем измерить расстояние x (см. рисунок сверху), которое оказывается равным $0.2D$ или $0.4R$. (при отсутствии атмосферы оно было бы равно радиусу R). Спроектировав Титан на плоскость, содержащую Солнце и аппарат (см. рисунок снизу), мы имеем:

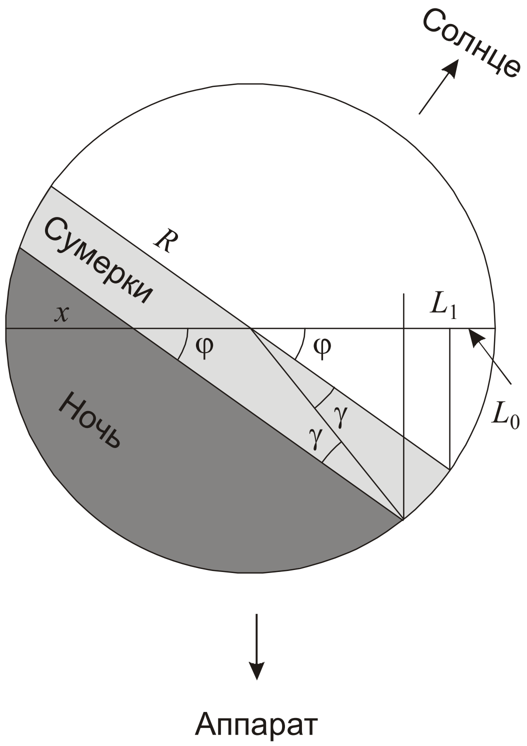
$$\frac{R-x}{\sin\gamma_2} = \frac{R}{\sin\varphi} = \frac{R}{\sqrt{1-(1-2F_0)^2}}.$$

Отсюда

$$\gamma_2 = \arcsin\left(\sqrt{1-(1-2F_0)^2}\,\frac{R-x}{R}\right) = 21^{\circ}.$$

Углы не совпадают, что естественно, так как все расстояния измеряются приближенно. Будем для определенности считать угол γ равным 18°.

На экваторе Титана во время равноденствия Солнце заходит перпендикулярно горизонту, и сумерки продолжаются, пока спутник поворачивается на этот угол γ. Период осевого вращения Титана T, как и у всех крупных спутников планет, синхронизован с орбитальным периодом и равен примерно 16 дней.



Синодический период (длительность солнечных суток) несколько больше из-за движения Сатурна по орбите, но так как он движется очень медленно, этой разницей можно пренебречь. Длительность сумерек во время равноденствия равна

$$t = T\frac{\gamma}{360^{\circ}} = 0.8 \text{ сут } \approx 19 \text{ час.}$$

Во время солнцестояний, когда склонение Солнца на Сатурне и Титане δ достигает 27°, длительность сумерек увеличивается на фактор (1/cos δ) и достигает 0.9 суток или 21.5 часа.

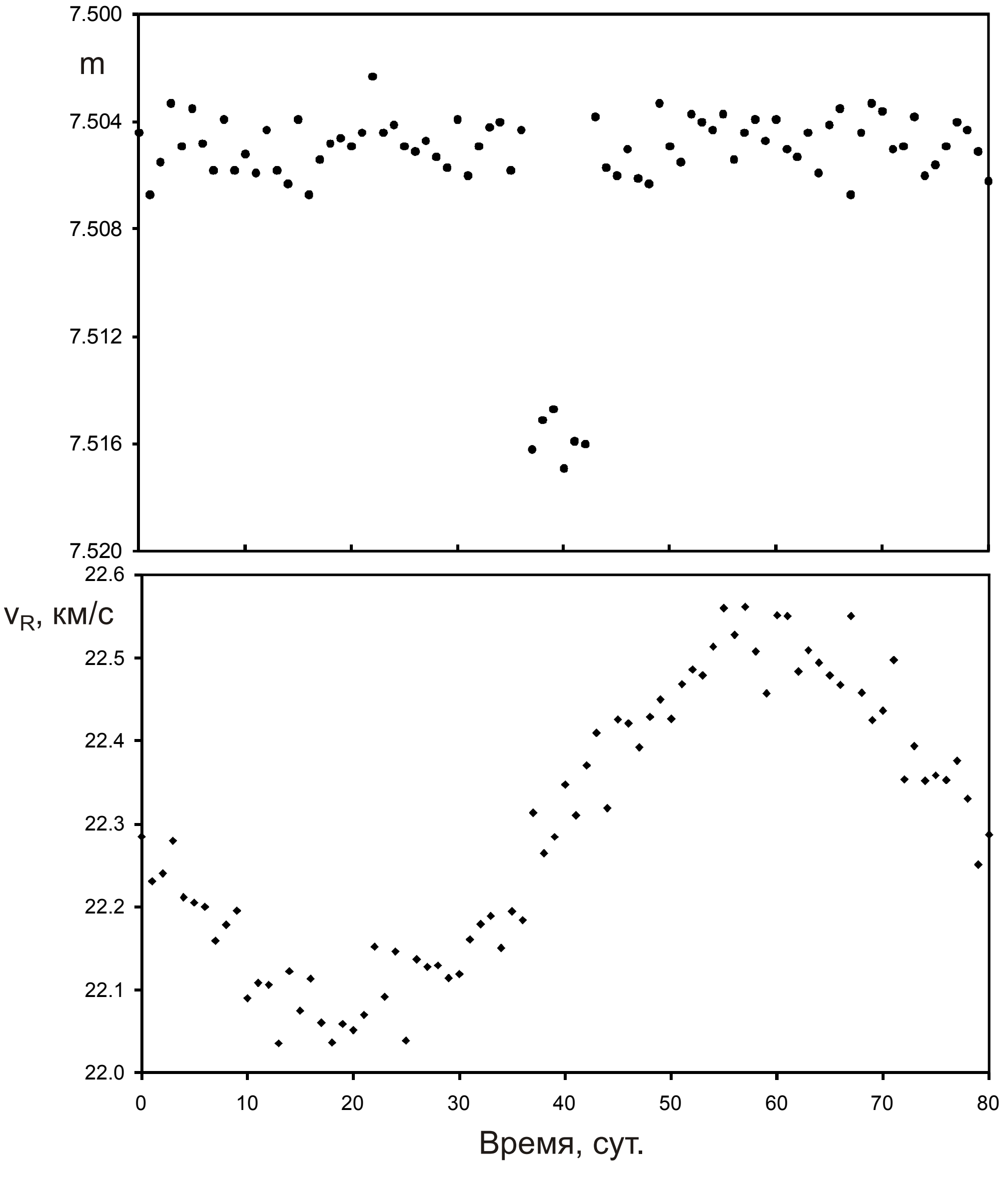
Система оценивания (от одного члена жюри).

1 этап – 2 балла.
Указание, какой из трех спутников – Титан, сделанное не на основе видимых размеров, на которые могло повлиять расположение космического аппарата, а оптического эффекта «удлинения рогов» либо видимого увеличения фазы.
2 этап – 6 баллов.
Определение угла погружения Солнца под горизонт, при котором еще продолжаются сумерки, и соответствующий участок на фотографии Титана еще остается освещенным. Это можно сделать любым из двух способов (увеличение фазы или удлинение рогов). Допускается погрешность до 5-6 градусов. Из данных 6 баллов три выставляется за качество геометрических измерений на фото, другие три – за точность вычислений.
3 этап – 1 балл.
Указание, что осевой период Титана равен орбитальному периоду. Участники могут вычислить синодический период Титана, который практически неотличим от осевого, возможно их прямое отождествление.
4 этап – 2 балла.
Вычисление длительности сумерек на экваторе Титана для элементарного случая равноденствий.
5 этап – 1 балл.
Учет случая солнцестояний.

X/XI.3 ДАЛЕКАЯ ПЛАНЕТА

О.С. Угольников

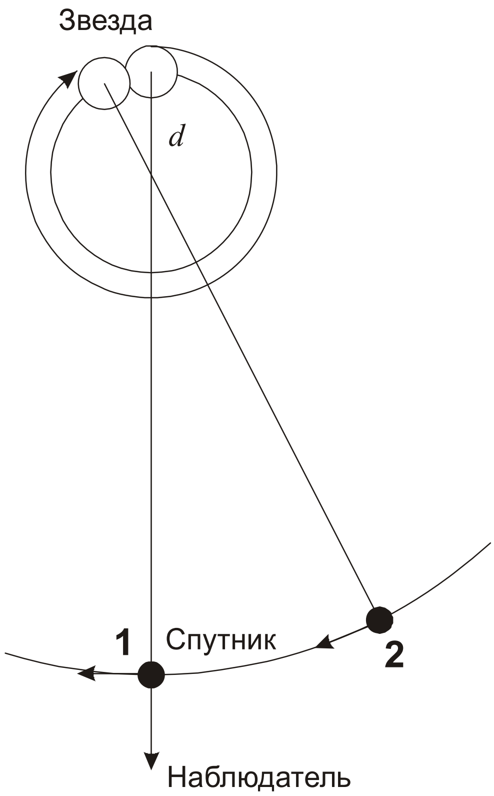
Условие. Около звезды с массой, равной массе Солнца, был обнаружен темный спутник. В некоторой обсерватории с интервалом ровно в 1 сутки производились одновременные измерения видимой звездной величины и гелиоцентрической лучевой скорости звезды, результаты представлены на графиках. Определите радиус звезды, массу и радиус спутника. Считать, что наблюдатель располагается в плоскости круговых орбит системы, а оба тела имеют сферическую форму. Других массивных тел в этой системе нет. Эффект потемнения звезды к краю не учитывать. Что из себя представляет эта звезда и чему равно расстояние до нее?



Решение. На первый взгляд, графики достаточно четко создают представление об этой системе. Наличие спутника приводит к двум эффектам – кратковременному падению блеска звезды в тот момент, когда темный спутник оказывается перед ней, а также синусоидальному изменению лучевой скорости звезды, связанному с ее движению относительно общего центра масс. Можно предположить, что орбитальный период составляет как раз 80 суток. Однако, более внимательный анализ показывает, что это не соответствует действительности.

Рассмотрим момент, соответствующий затмению звезды (момент времени 40 суток на графике), изображенный на рисунке цифрой 1. В это время оптическая звезда находится в наиболее удаленной от Земли точке орбиты. После затмения она должна начать приближаться к наблюдателю, что означает уменьшение ее лучевой скорости. Однако, последующие точки на кривой лучевой скорости, если не учитывать их погрешность, оказываются выше, то есть соответствуют удалению оптической звезды от наблюдателя.

Данное противоречие снимается, если вспомнить, что все наблюдения производились с интервалом ровно в 1 сутки. Коль скоро последующие за затмением (40 суток) измерения соответствуют большей лучевой скорости, на них система оказывается в предшествующей фазе (начало затмения или незадолго до него). Следовательно, за 1 сутки система почти успевает сделать N целых оборотов, приближаясь уже к следующему затмению (случай $N=1$ показан на рисунке).



К моменту следующего наблюдения через время t (1 сутки) система не успела завершить $(1/K)$ целого оборота, где $K=80$. Тогда орбитальный период выражается как:

$$T = \frac{t}{N-(1/\mathrm{K})} \approx \frac{t}{N}.$$

Целое число N заранее неизвестно. Определим другие характерные параметры системы. Предположив, что масса спутника меньше массы звезды (в дальнейшем мы сможем это проверить), которая сама равна массе Солнца, из III закона мы получаем величину радиуса орбиты спутника:

$$a = (T,\ \textit{годы})^{2/3} = 3 \text{ млн км} / N^{2/3}.$$

Звездная величина вне затмений составляет $m_0 = 7.505$, во время затмений она уменьшается до $m_1 = 7.516$. Так как наблюдатель находится точно в плоскости орбиты системы, а яркость звезды однородна по диску, мы можем получить соотношение радиусов компонент:

$$m_0 - m_1 = 2.5\log\left(\frac{\pi R^2 - \pi r^2}{\pi R^2}\right) = 2.5\frac{\ln(1 - r^2 / R^2)}{ln 10} = -\frac{2.5}{\ln 10}\frac{r^2}{R^2};$$

$$\frac{r}{R} = \sqrt{\frac{\ln 10 \cdot (m_1 - m_0)}{2.5}} \approx \sqrt{0.92(m_1 - m_0)} = 0.1.$$

Спутник в 10 раз меньше звезды по радиусу. Далее, из K=80 измерений через равные интервалы времени k=6 пришлись на затмения. Следовательно, длительность затмения есть примерно k/K от орбитального периода T. За весь период спутник пролетает путь $2\pi a$, а за время затмения – диаметр главной звезды (мы вновь считаем спутник много меньшим звезды как по размерам, так и по массе). Тогда мы получаем величину радиуса звезды:

$$\frac{2R}{2\pi a} = \frac{k}{K}; \quad R = \frac{\pi a k}{K} = \frac{700\ тыс.км}{N^{2/3}}.$$

Итак, если предположить, что за одни сутки система почти завершила один оборот, то радиус звезды получается равным радиусу Солнца. Учитывая, что по массе звезда также схожа с Солнцем, это представляется наиболее вероятным вариантом. Действительно, подстановка N=2 дает радиус в 0.63 радиуса Солнца. Подобных звезд с солнечной массой не существует, так как звезда солнечной массы не может иметь подобный радиус ни на каких стадиях своей эволюции. Даже редкие типы звезд - субкарлики - при солнечной массе имеют больший радиус. Такие же выводы можно сделать и для больших N. Единственный альтернативный вариант, который можно считать теоретически возможным – белый карлик с радиусом порядка радиуса Земли, и тогда N~1000. Хоть это и представляется крайне маловероятным для затменной системы, мы рассмотрим этот вариант наряду с основным в дальнейшем решении.

Амплитуда изменений лучевой скорости звезды v (ее отклонение от среднего значения) составляет 0.2 км/с. Учитывая ориентацию орбиты, это есть сама орбитальная скорость звезды. Радиус орбиты звезды составляет

$$A = \frac{vT}{2\pi} = \frac{3000\text{ км}}{N}.$$

Зная радиусы орбит звезды и спутника, мы получаем соотношение их масс:

$$\frac{m}{M} = \frac{A}{a} = \frac{3000\ км}{N} \cdot \frac{N^{2/3}}{3\ млн\,км} = \frac{0.001}{N^{1/3}}.$$

Если вспомнить о варианте белого карлика (N~1000), то спутник будет представлять собой тело с массой 10^{-4} массы Солнца. При этом его радиус в 10 раз меньше радиуса звезды, то есть около 600 км! В настоящее время таких плотных маломассивных объектов во Вселенной не найдено, более того, непонятно, как они могли бы появиться. Поэтому правдоподобным остается лишь вариант N=1, при котором звезда оказывается копией Солнца, а ее спутник в 10 раз меньше по размеру и в 1000 раз меньше по массе. Он очень похож на планету Юпитер. Можно показать, что несмотря на близость к звезде, он будет устойчивым к приливным силам, которые будут более чем в 10 раз слабее, чем это требуется для разрыва планеты.

Нам остается найти расстояние до системы. Учитывая, что звезда похожа на Солнце (абсолютная величина $+4.7^m$), а ее видимый блеск равен $+7.5^m$, мы можем заключить, что система отстоит от нас на 35 пк.

Система оценивания (от одного члена жюри).

1 этап: 4 балла.
Ключевой момент решения – вывод о возможных значениях орбитального периода. При выводе, что период равен 80 суткам, весь этап не засчитывается (0 баллов). Если в качестве единственного возможного периода берутся 1 сутки (без рассмотрения возможности других целых N), из этих 4 баллов выставляется 3 балла, остальные этапы решения (кроме возможного анализа типа звезд для разных N) оцениваются в полной мере, даже если они рассматриваются только для N=1.
2 этап: 1 балл.
Вычисление соотношения радиусов, исходя из глубины минимумов блеска.
3 этап: 1 балл.
Выражение для радиуса звезды, исходя из длительности затмений (в явном виде либо учет по ходу последующих вычислений).
4 этап: 2 балла.
Выражение для массы планеты через амплитуду лучевой скорости звезды. Если вместо амплитуды берется сама лучевая скорость (22 км/с), данный этап не засчитывается, ровно как и последующие, так как они приводят к неестественно большой массе планеты.
5 этап: 2 балла.
Анализ, какие из чисел N могут иметь физический смысл. Оценивается только для тех решений, где предположена возможность разных чисел N. Необходимо сделать вывод, что значения N>1 не соответствуют ни нормальным звездам, ни белым карликам (из-за неестественных свойств планеты). Если участник олимпиады допускает вариант N=2 как соответствующий субкарликам, эта ошибка считается незначительной и не влияет на оценку.
6 этап: 1 балл.
Вывод о типе звезды. Выставляется только в случае правильного ответа (Солнце), полученного на основе правильного анализа случая N=1.
7 этап: 1 балл.
Определение расстояния до системы. Оценивается только для правильного и обоснованного на предыдущих этапах вывода, что звезда аналогична Солнцу по своим свойствам.

Возможная ошибка участника: Предположение, что орбитальный период планеты составляет 80 дней. Оно приводит к большому радиусу как звезды (20 радиусов Солнца), так и планеты (2 радиуса Солнца!). При подобном решении не засчитывается первый этап (0 баллов). Этапы 2-4 засчитываются при условии корректности расчетов (сумма – 4 балла). Этап 5 в этом решении отсутствует, этап 6 в задаче не засчитывается, так как он приводит к абсурдному радиусу планеты. 7 этап правильно выполнить невозможно, так как неизвестна светимость звезды. Общая оценка не может превышать 4 баллов.

Возможная ошибка участника: рассматривается только вариант N=1 с получением правильного ответа (звезда типа Солнца). В этом случае за первый этап выставляется 3 балла, этапы 2-4 засчитываются полностью (при условии правильности выполнения). Этап 5 при таком решении отсутствует, этапы 6 и 7 – корректны. Общая оценка не может превышать 9 баллов.

XXIV Всероссийская олимпиада школьников по астрономии

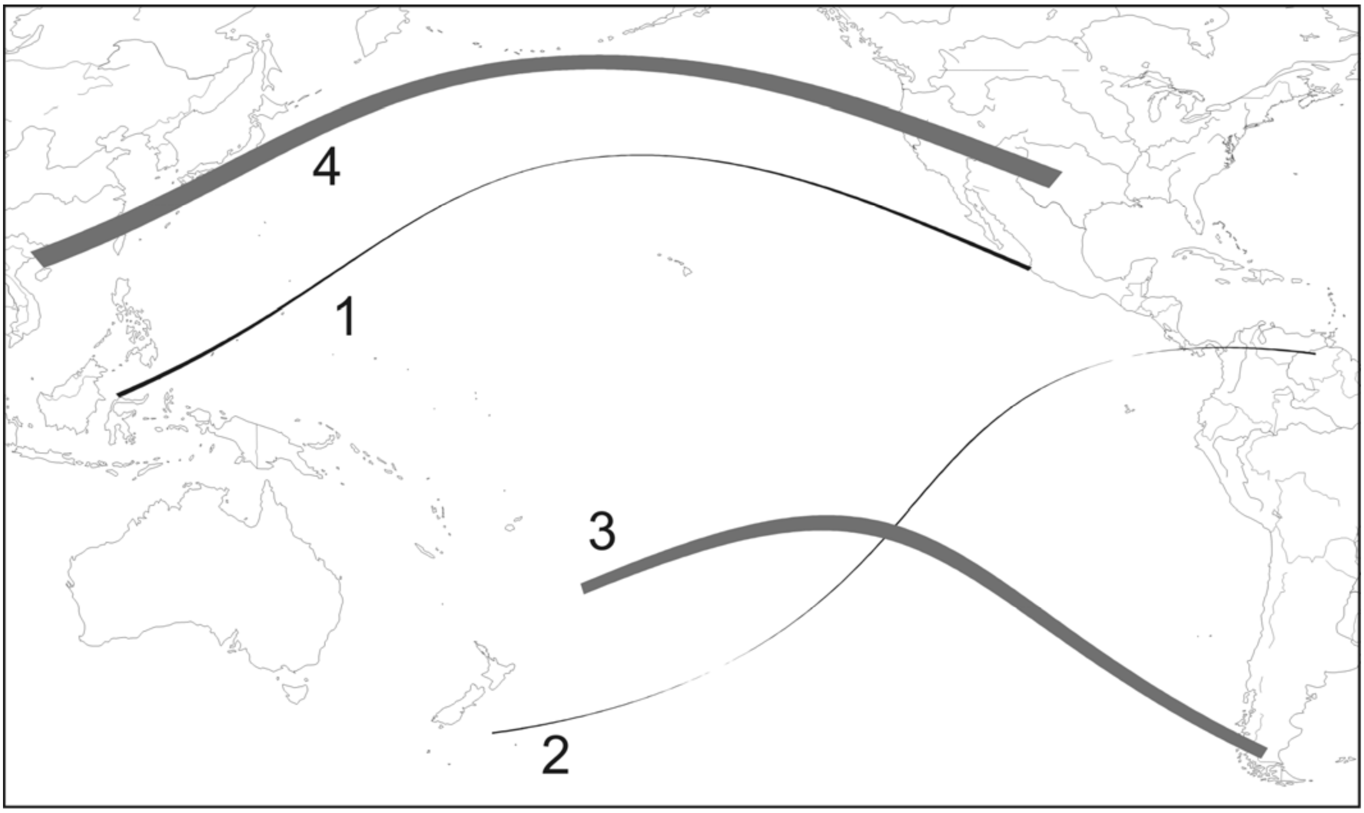
Смоленск, 2017 г.

Блиц-тест

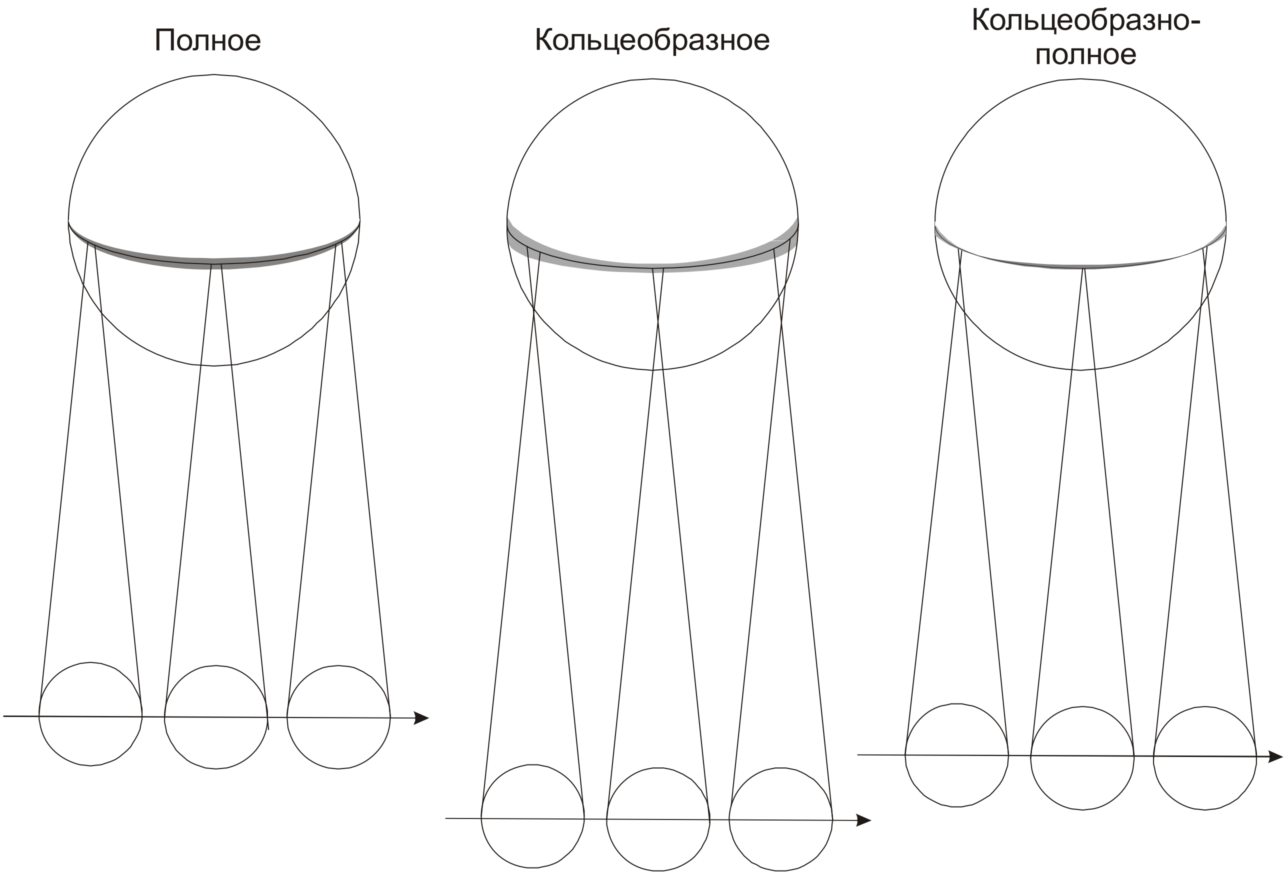
IX/X/XI.1 ЧЕТЫРЕ ПОЛОСЫ

О.С. Угольников

Условие. Перед Вами карта части поверхности Земли, на которой нанесены области видимости полных и кольцеобразных фаз четырех солнечных затмений. Определите тип каждого затмения, вписав букву в соответствующую графу таблицы: A – кольцеобразное, B – кольцеобразно-полное, C – полное.



Решение. Обратим внимание, что полосы затмений несколько разные. Полосы 1 и 4 сужаются в середине, а полоса 3, наоборот, утолщается. Полоса 2 очень тонкая, а в двух местах она сужается настолько, что почти не видна на рисунке. Рассмотрим, как изменяется по ходу движения по поверхности Земли полоса видимости затмений всех трех типов (рисунок):



У полного затмения ширина полосы в середине увеличивается, так как эти точки поверхности Земли ближе к Луне, и ее тень там шире. У кольцеобразного затмения полоса в середине, наоборот, сужается. Кольцеобразно-полное затмение начинается на Земле как кольцеобразное с постепенно сужающейся полосой. Потом она превращается в точку, в которой видно центральное затмение с фазой, равной единице (диски Солнца и Луны совпадают). Далее идет полное затмение с постепенно расширяющейся полосой до ее середины, после чего все происходит в обратном порядке. Сравнивая этот рисунок с картой в условии, мы можем ответить на вопрос задачи. Для справки приводим и даты затмений, карты которых приведены в условии.

1	2	3	4
A	B	C	A
10.06.2002	08.04.2005	10.07.2010	21.05.2012

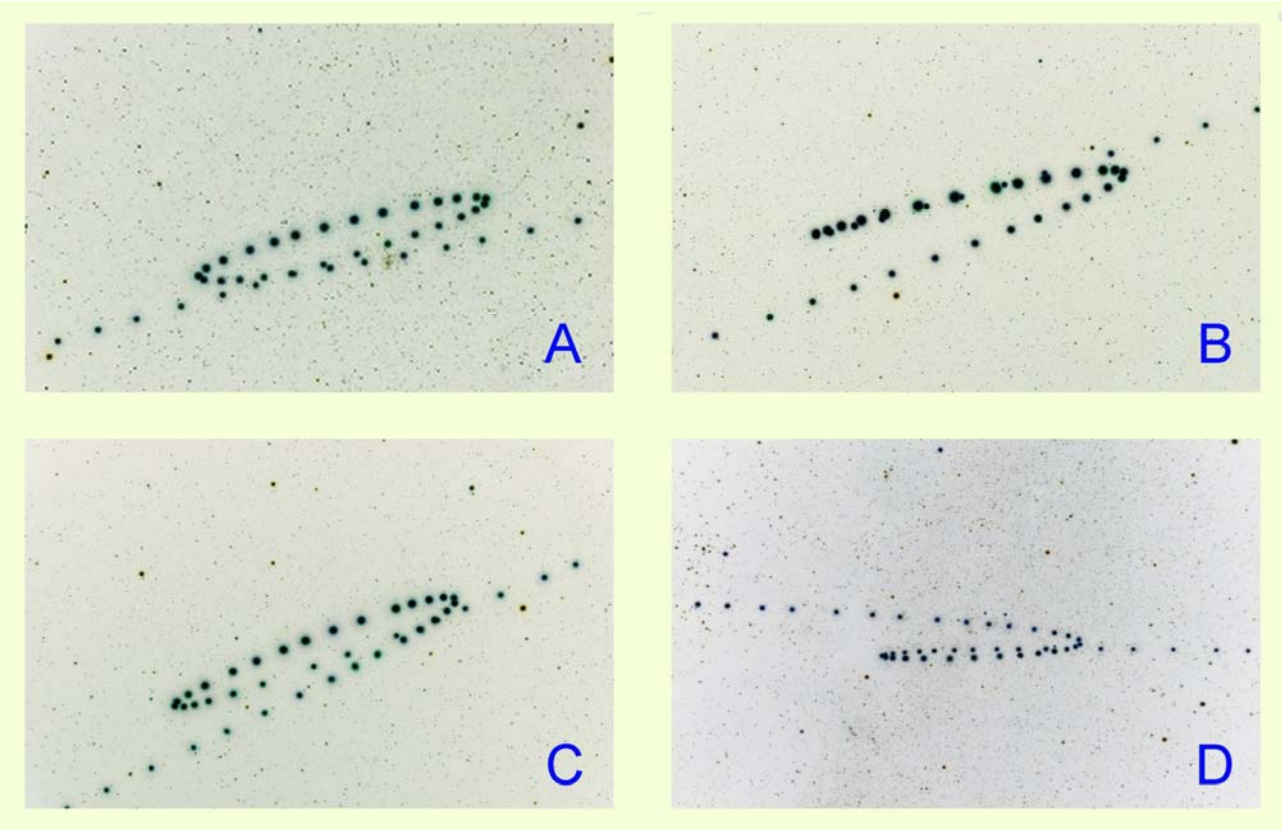
Алгоритм оценивания. Каждый правильный ответ оценивается в 2 балла. Некоторые неточные ответы (указание затмения 1 с тонкой полосой как кольцеобразно-полного и затмения 2 как полного) оцениваются 1 баллом.

Затмение	Нет ответа	A	B	C
1	0	2	1	0
2	0	0	2	1
3	0	0	0	2
4	0	2	0	0

IX/X/XI.2 МАРСИАНСКИЕ ПЕТЛИ

Н.Е. Шатовская

Условие. На фото показаны треки Марса близи четырех последовательных противостояний (фото с сайта "Мир ночью" http://www.twanight.org, автор Тунк Тезель, негатив). Расположите фото в хронологической последовательности от самой ранней к самой поздней. Большая полуось орбиты Марса составляет 1.524 а.е.



Решение. Из большой полуоси орбиты Марса мы можем получить период его обращения вокруг Солнца (687 суток) и синодический период – промежуток времени между двумя последовательными противостояниями Марса (780 суток). Он чуть больше марсианского года и двух земных лет. Поэтому каждое следующее противостояние будет происходить несколько восточнее на небе вдоль эклиптики, чем предыдущее. Хронологический порядок можно восстановить, отождествив созвездия, по которым перемещается планета.

На фото A Марс перемещается по созвездию Рака: трек проходит по звёздному скоплению Ясли (M44), у правого края фото видны Близнецы - Кастор и Поллукс, у левого - голова Льва. На фото B несложно узнать созвездие Девы, на фото C - трапецию Льва. Таким образом, фото C сделано позже фото A и раньше фото B.

Чтобы отождествить созвездия на фото D, нужно догадаться, что оно перевернуто "вверх ногами". У верхнего края фото видны Бетельгейзе и Беллатрикс, в правом верхнем углу – Процион, у правого края – Близнецы, у левого – голова Тельца, у нижнего – Капелла. Поскольку Телец – самое западное из упомянутых зодиакальных созвездий, фото D в хронологическом порядке должно быть первым. В таблице приведена правильная последовательность и годы, в которые были сделаны фотографии.

1	D	2007-2008
2	A	2009-2010
3	C	2012
4	B	2014

Алгоритм оценивания. Для оценивания решения определяется N – число правильных пар ответов, состоящих в нужной последовательности друг с другом (например, если ответ A в работе участника стоит раньше ответа B, как и должно быть, число N увеличивается на единицу). У точного ответа число N составляет 6. Оценка за задачу в зависимости от числа N определяется в соответствии с таблицей.

N	Оценка
0, 1, 2	0
3	2
4	4
5	6
6	8

При наличии повторов в ответе участника (например, дважды указана буква A) они идут в зачет, но не более одного раза. Например, при ответе D, D, A, A пара D-A является правильной, но засчитывается только один раз. Число N=1, оценка составляет 0 баллов.

Пример. Правильный ответ – D, A, C, B, а участник теста дал ответ C, D, B, A. Ответ содержит три правильные пары (C-B, D-A, D-B). Оценка составляет 2 балла.

IX/X.3 ИСКУССТВО И РЕАЛЬНОСТЬ

О.С. Угольников

Условие. Перед Вами четыре картины знаменитого русского художника И.К. Айвазовского. Отметьте в таблице, какие из ситуаций, изображенных на картинах, ***не могли*** иметь место в реальности.

Решение. На всех четырех картинах присутствует растущая Луна (если предположить, что мы находимся в северном полушарии Земли), ее вид и положение определяют возможность наступления такой ситуации на реальном небе. На картинах A и D можно также отметить положение Солнца (как линия пересечения лучей на картине A и как световое пятно на картине D). На картине D рога серпа Луны не направлены от Солнца. Подобная картина не могла наблюдаться. Аналогичный эффект виден на картине A, хотя серп Луны там плохо заметен. Даже если не обратить на это внимание, ситуация на картине A все равно невозможна: Солнце находится практически за правым краем дома, и его тень должна была быть направлена в сторону наблюдателя. В реальности она отклонена на значительный угол в левую сторону.

На картине B Луна имеет значительную фазу (больше 0.5), что указывает на ее большое угловое расстояние от Солнца (больше 90°). При этом полуденная линия Луны образует большой угол с вертикалью, этот же угол составляет линия "Солнце-Луна" и горизонт. Следовательно, Солнце должно располагаться глубоко под горизонтом, и в пункте наблюдения должна быть темная ночь. На картине же изображена яркая заря. Подобная ситуация не могла случиться в реальности.

Наконец, на картине C изображен серп молодой Луны. По направлению его рогов можно судить о положении Солнца – оно находится у горизонта или неглубоко под ним в правой части картины. Но в этом случае большое кучевое облако должно быть темным, так как Солнце располагается за ним. Оно же изображено светлым, каким облака бывают утром и вечером с противоположной от Солнца стороны. Ситуация на картине 3 также нереальна. Итак, окончательный ответ:

A	V
B	V
C	V
D	V

Алгоритм оценивания. Оценка за задание определяется числом правильных ответов N:

N	Баллы
0	0
1	1
2	2
3	5
4	8