

## УСЛОВИЯ И РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

### 9 класс

- 9.1. Даны квадратные трёхчлены  $f_1(x), f_2(x), \dots, f_{100}(x)$  с одинаковыми коэффициентами при  $x^2$ , одинаковыми коэффициентами при  $x$ , но различными свободными членами; у каждого из них есть по два корня. У каждого трёхчлена  $f_i(x)$  выбрали один корень и обозначили его через  $x_i$ . Какие значения может принимать сумма  $f_2(x_1) + f_3(x_2) + \dots + f_{100}(x_{99}) + f_1(x_{100})$ ?

(Н. Агаханов)

**Ответ.** Только 0.

**Решение.** Пусть  $i$ -й трёхчлен имеет вид  $f_i(x) = ax^2 + bx + c_i$ .

Тогда

$f_2(x_1) = ax_1^2 + bx_1 + c_2 = (ax_1^2 + bx_1 + c_1) + (c_2 - c_1) = c_2 - c_1$ , поскольку  $f_1(x_1) = 0$ . Аналогично получаем равенства  $f_3(x_2) = c_3 - c_2, \dots, f_{100}(x_{99}) = c_{100} - c_{99}$  и  $f_1(x_{100}) = c_1 - c_{100}$ .

Складывая полученные равенства, получаем

$$f_2(x_1) + f_3(x_2) + \dots + f_1(x_{100}) = (c_2 - c_1) + \dots + (c_1 - c_{100}) = 0.$$

Значит, единственное возможное значение суммы — ноль.

**Комментарий.** Верный ответ без обоснований — 0 баллов.

- 9.2. Дан равнобедренный треугольник  $ABC$ ,  $AB = BC$ . В окружности  $\Omega$ , описанной около треугольника  $ABC$ , проведен диаметр  $CC'$ . Прямая, проходящая через точку  $C'$  параллельно  $BC$ , пересекает отрезки  $AB$  и  $AC$  в точках  $M$  и  $P$  соответственно. Докажите, что  $M$  — середина отрезка  $C'P$ .

(Б. Обухов)

**Решение.** Так как  $CC'$  — диаметр  $\Omega$ , имеем  $\angle C'AC = 90^\circ$ . Поскольку  $MP \parallel BC$ , получаем  $\angle MPA = \angle BCA = \angle BAC$  (см. рис. 1). Значит, треугольник  $AMP$  — равнобедренный, и поэтому его высота  $MD$  является и медианой. Так как  $AD = DP$  и  $AC' \parallel DM$ , по теореме Фалеса получаем, что  $C'M = MP$ .

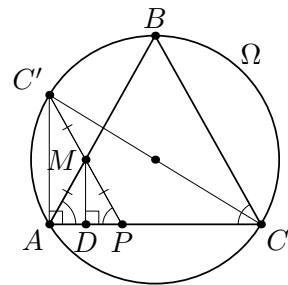


Рис. 1

**Замечание.** Есть и другие решения, например, с исполь-

зованием подсчёта углов в прямоугольном треугольнике  $PAC'$ ; именно,  $\angle MAC' = 90^\circ - \angle MAP = 90^\circ - \angle ACB = 90^\circ - \angle MPA = \angle MC'A$ , откуда  $MP = MA = MC'$ .

- 9.3. Петя выбрал несколько последовательных натуральных чисел и каждое записал либо красным, либо синим карандашом (оба цвета присутствуют). Может ли сумма наименьшего общего кратного всех красных чисел и наименьшего общего кратного всех синих чисел являться степенью двойки?

(О. Дмитриев, Р. Женодаров)

**Ответ.** Нет, не может.

**Решение.** Предположим противное. Рассмотрим степени двойки, на которые делятся выписанные числа; пусть  $2^k$  — наибольшая из них. Если хотя бы два выписанных числа делятся на  $2^k$ , то два соседних таких числа будут различаться на  $2^k$ . Значит, одно из них будет делиться на  $2^{k+1}$ , что невозможно в силу выбора  $k$ . Значит, среди выписанных чисел ровно одно делится на  $2^k$ .

Наименьшее общее кратное (НОК) группы, содержащей это число, будет делиться на  $2^k$ , а НОК оставшейся группы — не будет. Значит, сумма этих НОК не делится на  $2^k$ ; с другой стороны, эта сумма больше, чем  $2^k$ . Поэтому эта сумма не может быть степенью двойки.

**Комментарий.** Доказано, что ровно одно из выписанных чисел делится на максимальную степень двойки — 2 балла.

- 9.4. У царя Гиерона есть 11 металлических слитков, неразличимых на вид; царь знает, что их веса (в некотором порядке) равны 1, 2, ..., 11 кг. Ещё у него есть мешок, который порвётся, если в него положить больше 11 кг. Архимед узнал веса всех слитков и хочет доказать Гиерону, что первый слиток имеет вес 1 кг. За один шаг он может загрузить несколько слитков в мешок и продемонстрировать Гиерону, что мешок не порвался (рвать мешок нельзя!). За какое наименьшее число загрузок мешка Архимед может добиться требуемого?

(И. Богданов, К. Кноп)

**Ответ.** За 2 загрузки.

**Решение.** Покажем, что Архимеду достаточно использовать мешок дважды. Пусть он сначала положит в мешок слит-

ки с весами 1, 2, 3 и 5 кг, а потом — слитки с весами 1, 4 и 6 кг. В обоих случаях мешок не порвётся.

Докажем, что это могло произойти только в том случае, если дважды был использован слиток веса 1 кг. Действительно, если бы Архимед в эти два раза вместо слитков с весами 1, ..., 6 кг использовал соответственно слитки с весами  $w_1, \dots, w_6$  кг, то эти веса удовлетворяли бы системе неравенств  $w_1 + w_2 + w_3 + w_4 + w_5 \leq 11$ ,  $w_1 + w_4 + w_6 \leq 11$ . Складывая эти неравенства, получаем  $w_1 + (w_1 + w_2 + \dots + w_6) \leq 22$ . В скобках стоит сумма шести различных натуральных чисел, то есть она не меньше  $1 + 2 + \dots + 6 = 21$ . Отсюда следует, что  $w_1 \leq 22 - 21 = 1$ . Значит,  $w_1 = 1$ , то есть слиток веса 1 кг однозначно определён.

Осталось показать, что одной загрузки недостаточно. Если Архимед загрузит один слиток, то мешок не порвётся в любом случае, то есть никакой слиток идентифицировать не удастся. Пусть Архимед загрузит больше одного слитка, и мешок не порвётся. Если слиток в 1 кг не загружен в мешок, то при замене им любого слитка из мешка результат не изменится; значит, в этом случае Гиерон даже не сможет понять, находится ли этот слиток в мешке. Если же искомый слиток в мешке, то Гиерон не сможет понять, какой из (хотя бы двух) загруженных слитков — требуемый.

**Замечание.** После указанных двух загрузок также однозначно определяется группа гирь с весами 2, 3 и 5 кг, а также группа с весами 4 и 6 кг.

**Комментарий.** Доказано только, что одной загрузки мешка недостаточно — 1 балл.

Приведён только верный пример двух загрузок, но не доказано, что он работает — 3 балла (эти баллы могут складываться с предыдущим).

Приведён верный пример двух загрузок, доказано, что он работает, но не доказано, что одной загрузкой не обойтись — 6 баллов.