Всероссийская олимпиада школьников по математике

II этап **10 класс** 6.12.2015

Работа рассчитана на **240** *минут*

1. В клетках квадрата $\mathbf{3 \times 3}$ записаны буквы (см. рисунок). Можно ли их расставить так, чтобы любые две буквы, исходно отстоявшие на ход коня, после перестановки оказались в клетках, отстоящих на ход короля? (*Например, из клетки с буквой* $\boldsymbol{a}$ *конь может пойти в клетки с буквами* $\boldsymbol{f}$ *и* $\boldsymbol{h}$, *а король — в клетки с буквами* $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{d}$ *и* $\boldsymbol{e}$.)

a	b	c
d	e	f
g	h	i

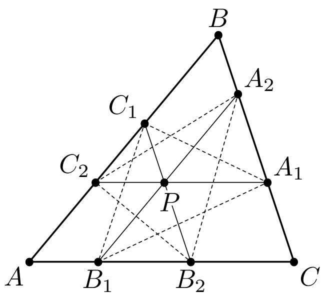
2. Каково наибольшее количество последовательных натуральных чисел, у каждого из которых ровно четыре натуральных делителя (включая **1** и само число)?

3. В остроугольном треугольнике $\boldsymbol{MKN}$ проведена биссектриса $\boldsymbol{KL}$. Точка $\boldsymbol{X}$ на стороне $\boldsymbol{MK}$ такова, что $\boldsymbol{KX = KN}$. Докажите, что прямые $\boldsymbol{KO}$ и $\boldsymbol{XL}$ перпендикулярны ($\boldsymbol{O}$ — центр описанной окружности треугольника $\boldsymbol{MKN}$).

4. Даны три квадратных трехчлена: $x^2 + b_1x + c_1$, $x^2 + b_2x + c_2$ и $x^2 + \frac{b_1+b_2}{2}x + \frac{c_1+c_2}{2}$. Известно, что их сумма имеет корни (возможно, два совпадающих). Докажите, что хотя бы у двух из этих трехчленов также есть корни (возможно, два совпадающих).

5. В турнире участвовали **50** шахматистов. В некоторый момент турнира была сыграна **61** партия, причем каждый участник сыграл либо две партии, либо три (и никто не играл друг с другом дважды). Могло ли оказаться так, что никакие два шахматиста, сыгравшие по три партии, не играли между собой?

6. Через точку $\boldsymbol{P}$ проведены три отрезка, параллельные сторонам треугольника $\boldsymbol{ABC}$ (см. рисунок). Докажите, что площади треугольников $\boldsymbol{A_1B_1C_1}$ и $\boldsymbol{A_2B_2C_2}$ равны.



III (региональный) этап всероссийской олимпиады пройдёт в феврале 2016 года. Ссылка на списки приглашенных будет доступна на сайте **http://vos.olimpiada.ru/**

LXXIX Московская математическая олимпиада (для 8–11 классов)
пройдет в МГУ 13 марта 2016 года. Начало в 10.00. Приглашаются все желающие!
Предварительная регистрация и подробная информация на сайте
http://olympiads.mccme.ru/mmo/

Всероссийская олимпиада школьников по математике

II этап **10 класс** 6.12.2015

Работа рассчитана на **240** *минут*

1. В клетках квадрата $\mathbf{3 \times 3}$ записаны буквы (см. рисунок). Можно ли их расставить так, чтобы любые две буквы, исходно отстоявшие на ход коня, после перестановки оказались в клетках, отстоящих на ход короля? (*Например, из клетки с буквой* $\boldsymbol{a}$ *конь может пойти в клетки с буквами* $\boldsymbol{f}$ *и* $\boldsymbol{h}$, *а король — в клетки с буквами* $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{d}$ *и* $\boldsymbol{e}$.)

a	b	c
d	e	f
g	h	i

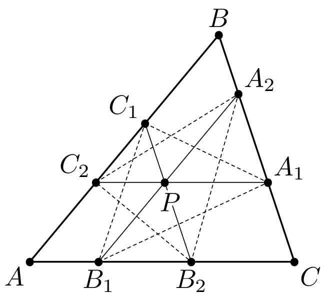
2. Каково наибольшее количество последовательных натуральных чисел, у каждого из которых ровно четыре натуральных делителя (включая **1** и само число)?

3. В остроугольном треугольнике $\boldsymbol{MKN}$ проведена биссектриса $\boldsymbol{KL}$. Точка $\boldsymbol{X}$ на стороне $\boldsymbol{MK}$ такова, что $\boldsymbol{KX = KN}$. Докажите, что прямые $\boldsymbol{KO}$ и $\boldsymbol{XL}$ перпендикулярны ($\boldsymbol{O}$ — центр описанной окружности треугольника $\boldsymbol{MKN}$).

4. Даны три квадратных трехчлена: $x^2 + b_1x + c_1$, $x^2 + b_2x + c_2$ и $x^2 + \frac{b_1+b_2}{2}x + \frac{c_1+c_2}{2}$. Известно, что их сумма имеет корни (возможно, два совпадающих). Докажите, что хотя бы у двух из этих трехчленов также есть корни (возможно, два совпадающих).

5. В турнире участвовали **50** шахматистов. В некоторый момент турнира была сыграна **61** партия, причем каждый участник сыграл либо две партии, либо три (и никто не играл друг с другом дважды). Могло ли оказаться так, что никакие два шахматиста, сыгравшие по три партии, не играли между собой?

6. Через точку $\boldsymbol{P}$ проведены три отрезка, параллельные сторонам треугольника $\boldsymbol{ABC}$ (см. рисунок). Докажите, что площади треугольников $\boldsymbol{A_1B_1C_1}$ и $\boldsymbol{A_2B_2C_2}$ равны.



III (региональный) этап всероссийской олимпиады пройдёт в феврале 2016 года. Ссылка на списки приглашенных будет доступна на сайте **http://vos.olimpiada.ru/**

LXXIX Московская математическая олимпиада (для 8–11 классов)
пройдет в МГУ 13 марта 2016 года. Начало в 10.00. Приглашаются все желающие!
Предварительная регистрация и подробная информация на сайте
http://olympiads.mccme.ru/mmo/