8 класс

8.1. Натуральное число n называется «хорошим», если после приписывания его справа к любому натуральному числу получается число, делящееся на n. Запишите десять «хороших» чисел, которые меньше, чем 1000. (*Достаточно привести ответ.*)

Ответ: любые 10 чисел из набора: 1, 2, 5, 10, 20, 25, 50, 100, 125, 200, 250, 500.

Ответ можно получить, исходя из следующих соображений. Приписывание справа числа n равносильно умножению исходного числа на 10^p, где p — количество цифр в числе n, и прибавлению к результату самого числа n. Так как исходное число может быть любым, то число n окажется «хорошим» тогда и только тогда, когда 10^p кратно n. Поэтому в разложении числа n на простые множители могут встречаться только множители 2 и 5. Заметим, что этого недостаточно; например, числа 4 и 625 «хорошими» не являются.

Критерии проверки:

$+$ *верно записано не менее, чем 10 «хороших» чисел, и других чисел в ответе нет*

$\pm$ *верно записано не менее, чем 10 «хороших» чисел, но, кроме них, в ответе присутствуют одно или два числа, не являющихся «хорошими»*

$\pm$ *верно записано 8 или 9 «хороших» чисел, и других чисел в ответе нет*

$\mp$ *верно записано 5 – 9 «хороших» чисел, но, кроме них, в ответе присутствуют одно или два числа, не являющихся «хорошими»*

$-$ *во всех других случаях*

$-$ *задача не решена или решена неверно*

Наличие в решении любых рассуждений (в том числе, и неверных) на результат проверки не влияет.

8.2. Сорока-ворона кашу варила, деток кормила. Третьему птенцу досталось столько же каши, сколько первым двум вместе взятым. Четвертому — столько же, сколько второму и третьему. Пятому — столько же, сколько третьему и четвертому. Шестому — столько же, сколько четвертому и пятому. А седьмому не досталось — каша кончилась! Известно, что пятый птенец получил 10 г каши. Сколько каши сварила сорока-ворона?

Ответ: 40 г.

Решение. Пусть первому птенцу досталось m г каши, а второму — n г. Тогда третьему досталось $m+n$ (г), четвертому — $m+2n$ (г), пятому — $2m+3n$ (г), шестому — $3m+5n$ (г). Следовательно, всего было каши: $m+n+(m+n)+(m+2n)+(2m+3n)+(3m+5n)=8m+12n=4(2m+3n)$ (г). Это в 4 раза больше, чем досталось пятому птенцу, значит, сорока-ворона сварила $10\cdot 4=40$ (г) каши.

Критерии проверки:

$+$ *приведено полное обоснованное решение*

$\mp$ *верный ответ получен путем рассмотрения частных примеров*

$\mp$ *разумно введены две переменные и записаны выражения для количества каши, доставшейся каждому птенцу (возможно, с ошибкой), но решение не доведено до верного ответа*

$-$ *приведен только ответ*

$-$ *задача не решена или решена неверно*

8.3. $ABCD$ — выпуклый четырехугольник. Известно, что $\angle CAD = \angle DBA = 40^\circ$, $\angle CAB = 60^\circ$, $\angle CBD = 20^\circ$. Найдите угол CDB.

Ответ: 30°.

Решение. Так как $\angle CAB = 60^\circ$, $\angle ABC = \angle ABD + \angle DBC = 60^\circ$, то треугольник ABC — равносторонний (см. рис. 8.3а). Далее можно рассуждать по-разному.

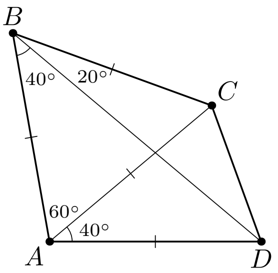

Рис. 8.3а

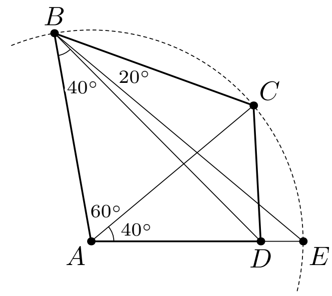

Рис. 8.3б

Первый способ. В треугольнике ABD: $\angle ABD = 40^\circ$, $\angle BAD = \angle BAC + \angle CAD = 100^\circ$, значит, $\angle BDA = 180^\circ - (40^\circ + 100^\circ) = 40^\circ$, значит, этот треугольник — равнобедренный (см. рис. 8.3а). Таким образом, $AB = BC = CA = AD$, поэтому треугольник CAD – также равнобедренный. Тогда $\angle ADC = \angle ACD = (180^\circ - \angle CAD) : 2 = 70^\circ$, $\angle CDB = \angle CDA - \angle BDA = 70^\circ - 40^\circ = 30^\circ$.

Второй способ. Проведем окружность с центром A и радиусом $AB = AC$ и докажем, что она содержит точку D. Пусть это не так, тогда окружность пересечет луч AD в некоторой точке E, отличной от D (см. рис. 8.3б). По теореме о вписанном угле $\angle CBE = \frac{1}{2}\angle CAE = 20^\circ$, то есть лучи BE и BD совпадут. Следовательно, совпадут точки E и D — противоречие. Так как окружность проходит через точку D, то $\angle CDB = \frac{1}{2}\angle CAB = 30^\circ$.

Возможно также аналогичное решение, в котором сначала доказывается равнобедренность треугольника CAD, а затем используется окружность с центром A и радиусом $AC = AD$. Отметим, что попытка сразу использовать вспомогательную окружность (без доказательства равенства каких-либо двух отрезков) вряд ли приведет к успеху.

Критерии проверки:

$+$ *приведено полное обоснованное решение*

$\pm$ *приведено верное в целом рассуждение, в котором есть незначительные неточности или пробелы*

$\mp$ *проведена вспомогательная окружность с центром A, содержащая точки B, C и D, но не доказано, что она существует, и получен верный ответ*

$-$ *приведен только ответ*

$-$ *задача не решена или решена неверно*

8.4. Двенадцать стульев стоят в ряд. Иногда на один из свободных стульев садится человек. При этом ровно один из его соседей (если они были) встает и уходит. Какое наибольшее количество человек могут одновременно оказаться сидящими, если вначале все стулья были пустыми?

Ответ: 11.

Решение. *Оценка.* Заметим, что все стулья одновременно занять невозможно, так как в тот момент, когда сядет человек на последний незанятый стул, один из его соседей встанет. Следовательно, одновременно сидящих может быть не больше, чем 11.

Пример. Покажем, как посадить 11 человек. Пронумеруем стулья числами от 1 до 12. Первый стул занять легко. Второй стул займем в два этапа. На первом этапе человек садится на третий стул, а на втором этапе посадим человека на второй стул, а сидящий на третьем стуле встанет. Дальше действуем аналогично: если заняты стулья с номерами от 1 до k, то сначала посадим человека на стул с номером $k + 2$, а затем посадим на стул с номером $k + 1$, освобождая при этом стул с номером $k + 2$. После того как эта операция будет проделана для всех k от 1 до 10, стулья с номерами от 1 до 11 будут заняты, а двенадцатый стул — свободен.

Критерии проверки:

$+$ *приведено полное обоснованное решение*

$\pm$ *приведен верный ответ и объяснено, как посадить* 11 (*есть верный пример*), *но не объяснено, почему не может быть* 12 *сидящих* (*нет оценки*)

∓ *приведен верный ответ и объяснено, почему не может быть 12 сидящих, но пример рассадки для 11 не приведен или приведен неверно*

− *приведен только ответ*

− *задача не решена или решена неверно*

8.5. Внутри равностороннего треугольника ABC отмечена произвольная точка M. Докажите, что можно выбрать на стороне AB точку C_1, на стороне BC — точку A_1, а на стороне AC — точку B_1 таким образом, чтобы длины сторон треугольника $A_1B_1C_1$ были равны отрезкам MA, MB и MC.

Решение. Отметим на стороне AB точку C_1, на стороне BC точку A_1, а на стороне AC точку B_1 таким образом, что $MC_1 \parallel BC$, $MA_1 \parallel AC$, $MB_1 \parallel AB$ (см. рис. 8.5). Тогда отрезки MA_1, MB_1 и MC_1 разобьют данный треугольник на три трапеции. Из параллельности следует, что каждый угол при большем основании этих трапеций равен 60°, поэтому эти трапеции равнобокие. Следовательно, в каждой трапеции диагонали равны: $B_1C_1 = MA$, $A_1C_1 = MB$, $A_1B_1 = MC$, что и требовалось.

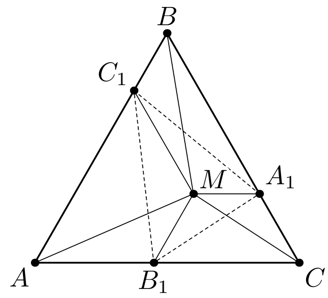

Рис. 8.5

Критерии проверки:

+ *приведено полное обоснованное решение*

± *приведено верное построение, но не объяснено (или объяснено неверно), почему стороны полученного треугольника — искомые*

− *задача не решена или решена неверно*

Наличие в решении любых рассуждений о количестве способов отметить искомые точки на результат проверки не влияет.

6. В каждой клетке таблицы размером 13×13 записано одно из натуральных чисел от 1 до 25. Клетку назовем «хорошей», если среди двадцати пяти чисел, записанных в ней и во всех клетках одной с ней горизонтали и одной с ней вертикали, нет одинаковых. Могут ли все клетки одной из главных диагоналей оказаться «хорошими»?

Ответ: нет, не могут.

Решение. Для каждой клетки одной из главных диагоналей будем рассматривать совокупность из двадцати пяти клеток: ее саму и все клетки, стоящие с ней в одной горизонтали или вертикали. Такую совокупность назовем «крестом».

Рассмотрим все «кресты», образованные клетками выделенной главной диагонали. Заметим, что любая клетка этой диагонали входит только в один «крест» (свой собственный), а любая другая клетка таблицы входит ровно в два таких «креста».

Далее можно рассуждать по-разному:

Первый способ. Рассмотрим натуральное число от 1 до 25, отсутствующее на выделенной главной диагонали (такое наверняка найдется, так как на диагонали всего лишь 13 клеток). Пусть все клетки главной диагонали — «хорошие», тогда это число входит в каждый из тринадцати «крестов» ровно один раз. Но любое число, стоящее вне главной диагонали, должно входить в два «креста», поэтому все кресты должны разбиваться на пары, а для тринадцати «крестов» это невозможно. Противоречие.

Второй способ. Для того, чтобы число 1 встретилось в каждом из 13 «крестов», оно должно быть записано в таблицу не менее семи раз. Это же можно сказать о каждом из двадцати пяти данных чисел. Значит, для того, чтобы все клетки рассматриваемой главной диагонали были «хорошими», потребуется заполнить не менее, чем $7 \cdot 25 = 175$ клеток. Но в таблице всего $13 \cdot 13 = 169$ клеток. Противоречие.

Таким образом, все клетки главной диагонали не могут оказаться «хорошими».

Критерии проверки:

+ *приведено полное обоснованное решение*

± *приведено верное в целом рассуждение, в котором есть незначительные неточности или пробелы*

− *приведен верный ответ с неверным обоснованием (в том числе, с помощью рассмотрения любого количества частных случаев или путем невразумительной ссылки на нечетность числа 13)*

− *приведен только ответ*

− *задача не решена или решена неверно*