Всероссийская олимпиада школьников по экономике

Заключительный этап

Москва, 2—8 апреля 2016 года

9—11 класс

Второй тур. Задачи

Дата написания	**4 апреля 2016 г.**
Количество заданий	**6**
Сумма баллов	**150**
Время написания	**240 минут**

Решения

Задача 7. Диалог об эластичности (25 баллов)

— Отличная погодка сегодня! — воскликнул Оптимист, заходя в отдел продаж.

— Днем обещают дожди... — ответил Пессимист.

— В этом месяце объем продаж нашего товара вырос, и это при том, что функция спроса на него осталась прежней! — радовался Оптимист.

— Еще бы, мы ведь снизили цены. Те же единицы продукции, что еще месяц назад мы продавали по более высокой цене, в этом месяце пошли в продажу по сниженной цене, и на этом мы потеряли часть выручки, — возразил Пессимист.

— Но зато в этом месяце мы продали много новых единиц продукции, и выручка, которую мы получили с их продажи, в полтора раза превосходит потери, которые ты только что упомянул! — начал спорить Оптимист. — Да и снижение цены очень незначительно, всего несколько процентов.

Что можно сказать об эластичности спроса на товар, судя по этому диалогу?

Игорь Ким

Решение

Пусть P_0 и Q_0 — прежняя цена и объем продаж, а P_1 и Q_1 — новые значения этих величин. Тогда сумма потерь, о которой говорит Пессимист, равна $L = (P_0 - P_1) \cdot Q_0$, а сумма выигрыша, о котором говорит Оптимист, равна $B = (Q_1 - Q_0) \cdot P_1$. По условию, отношение между этими величинами равно 1,5:

$$\frac{B}{L} = \frac{(Q_1 - Q_0) \cdot P_1}{(P_0 - P_1) \cdot Q_0} = 1{,}5 \quad \Longrightarrow \quad \frac{(Q_1 - Q_0) \cdot P_1}{(P_1 - P_0) \cdot Q_0} = -1{,}5.$$

Поскольку, по словам Оптимиста, новая цена отличается от старой незначительно, можно сказать, что второе выражение примерно равно эластичности:

$$\frac{(Q_1 - Q_0) \cdot P_1}{(P_1 - P_0) \cdot Q_0} \approx \frac{(Q_1 - Q_0) \cdot P_0}{(P_1 - P_0) \cdot Q_0} = E_P^d.$$

Ответ: эластичность спроса примерно равна $-1{,}5$.

Схема оценивания

- Математическая формализация диалога из условия — **5 баллов**.
- Если формализация и расчет выполнен правильно, но при решении происходит случайная или намеренная подмена индексов, приводящая к непосредственной формуле эластичночти, всё решение оценивается в **10 баллов**.

Штрафы:

- Если формула выведена правильно, но вывод делается без ссылки на незначительность изменения переменных (из условия) — **штраф 1 балл**.
- При верной логике решения получен ответ, что эластичность *точно* равняется 1,5 — **штраф 1 балл**.
- Вообще не получен какой-либо конкретный числовой ответ при верной логике решения — **штраф 5 баллов**.
- Ошибка в формуле эластичности — **штраф 7 баллов**.

Задача 8. Бюджетный федерализм (25 баллов)

Монополист, обратная функция спроса на продукцию которого имеет вид $p = 140 - 2q$, работает по такой технологии, что для производства единицы продукции необходимы две единицы труда. Труд нанимается на конкурентном рынке по ставке заработной платы 10 д. е. *С каждой проданной единицы* фирма должна отчислять f д. е. в государственный бюджет — это федеральный налог. Кроме того, *с каждой нанятой единицы труда* фирма должна отчислять r д. е. — это региональный налог, взимаемый местными властями. Выбирая ставки налогов, власти обоих уровней стараются получить побольше поступлений в бюджет своего уровня.

а) (11 баллов) Пусть сначала свою ставку называют федеральные власти, а затем — региональные, после этого фирма выбирает объем производства. Какие будут ставки налогов?

б) (7 баллов) Ответьте на вопрос предыдущего пункта, если, наоборот, сначала свою ставку называют региональные власти, а затем — федеральные.

в) (7 баллов) Что можно сказать о ставках налогов в случае, если бы власти обоих уровней принимали решения об их уровне согласованно, максимизируя суммарные налоговые поступления в оба бюджета?

Максим Земцов

Решение

Третий этап «игры» между властями двух уровней и фирмой во всех пунктах устроен одинаково: узнав ставки f и r, фирма выбирает оптимальный объем выпуска, максимизируя прибыль.

Поскольку требуемое количество труда для производства Q единиц составляет $L = 2Q$, общая сумма налогов, уплачиваемых фирмой, составит $T = T_f + T_r = fQ + r \cdot 2Q$. Запишем функцию прибыли:

$$\pi(Q) = (140 - 2Q)Q - 20Q - fQ - r \cdot 2Q = (120 - 2Q - f - 2r)Q.$$

Это парабола с ветвями вниз, максимум которой находится в вершине

$$Q^\star = 30 - \frac{f}{4} - \frac{r}{2}.$$

Выпишем налоговые поступления в бюджет каждого уровня:

$$T_f = fQ^\star = f\left(30 - \frac{f}{4} - \frac{r}{2}\right), \tag{8.1}$$

$$T_r = r \cdot 2Q^\star = r\left(60 - \frac{f}{2} - r\right). \tag{8.2}$$

а) В этом пункте региональные власти будут принимать решение о r, зная, какая выбрана f, а также зная, как на обе ставки отреагирует фирма. Поскольку f воспринимается ими как заданная величина, можно найти оптимальный ответ — ставку r. Максимизируя параболу с ветвями вниз из (8.2), получаем

$$r = 30 - \frac{f}{4}.$$

Предвидя это решение, федеральные власти будут максимизировать.

$$T_f = f\left(30 - \frac{f}{4} - \frac{30 - f/4}{2}\right) = f\left(\frac{30 - f/4}{2}\right).$$

Это также квадратичная парабола с ветвями вниз и вершиной в точке $f^\star = 60$ (легко посчитать ее, например, как среднее арифметическое между нулями функции и сославшись на симметричность параболы относительно вершины), откуда легко посчитать $r^\star = 15$.

б) В этом пункте федеральные власти будут принимать решение о f, зная, какая выбрана r, а также зная, как на обе ставки отреагирует фирма. Поскольку r воспринимается ими как заданная величина, можно найти оптимальный ответ — ставку f. Максимизируя параболу с ветвями вниз из (8.1), получаем

$$f = 60 - r.$$

Предвидя это решение, региональные власти будут максимизировать.

$$T_r = r\left(60 - \frac{60-r}{2} - r\right) = r\left(\frac{60-r}{2}\right).$$

Это также квадратичная парабола с ветвями вниз и вершиной в точке $r^\star = 30$, откуда легко посчитать $f^\star = 30$.

в) Суммарные налоговые сборы равны

$$T = T_f + T_r = f\left(30 - \frac{f}{4} - \frac{r}{2}\right) + r\left(60 - \frac{f}{2} - r\right) = (f+2r)\left(30 - \frac{f+2r}{4}\right).$$

По виду функции можно понять, что суммарные налоговые поступления зависят от величины $t = f + 2r$, и если выбрана эта сумма, то с точки зрения общих доходов бюджетов не важно, какие именно f и r выбраны. Поэтому

$$T = t\left(30 - \frac{t}{4}\right).$$

Это квадратичная парабола с ветвями вниз и вершиной в точке $t = 60$. Таким образом, для максимизации общих налоговых сборов нужно выбрать любые $f^\star$ и $r^\star$, такие что $f^\star + 2r^\star = 60$.

Схема оценивания

Общие критерии:

- Если достаточные условия не фигурируют в работе, то штраф **1 балл**.
- За арифметические ошибки штраф **1 балл**, дальше - смотря насколько исказилось решение и ответ.
- Если используется производственная функция $q = 2L$ вместо $L = 2q$, то штраф **2 балла**.
- Если пункты **а)** и **б)** перепутаны местами, то штраф - половина баллов, то есть $0{,}5(5+7) = 6$ **баллов**. Если рассматривается одновременное взаимодействие вместо последовательно (пункты **а** или **б**), одновременное взаимодействие вместо «сговора» (пункт **в**) или последовательное взаимодействие вместо «сговора» (пункт **в**)), то баллы за соответствующие пункты не начисляются, потому что решение неправильное.

Получение выражений в (8.1) и (8.2) оценивается в 6 баллов, из них: 2 балла за постановку задлачи фирмы, 2 балла за ее решение и по 1 баллу за получение соответствующих выражений для налоговых сборов. Эти баллы ставятся только один раз, если нахождение функций налоговых сборов хотя бы один раз встречается в решении.

а) Постановка задачи региональных властей — 1 балл, решение задачи — 1 балл.

Постановка задачи федеральных властей — 1 балл. Решение задачи и нахождение двух равновесных ставок налога — 2 балла.

б) Постановка задачи федеральных властей — 1 балл, решение задачи — 2 балла.

Постановка задачи региональных властей — 1 балл. Решение задачи и нахождение двух равновесных ставок налога — 3 балла.

в) Постановка задачи на поиск максимальных суммарных сборов — 1 балл.

Переход к одной переменной и решение задачи на поиск ее оптимального значения (включая обсуждение достаточного условия) — 6 баллов.

Если переход к одной переменной не происходит, а участник решает задачу с помощью частных производных, не обсуждая при этом достаточные условия, то он получает 3 балла из 6 в случае правильного ответа и от 0 до 2 баллов в случае неправильного ответа.

Задача 9. Экономика «Платона» (25 баллов)

В Древней Греции ежегодный спрос купцов на грузоперевозки дальнобойными колесницами описывается уравнением $Q = 100 - P$, а предложение грузоперевозок со стороны колесничих — уравнением $Q = P$, где Q — объем грузоперевозок (в тоннах, умноженных на километр пути), а P — цена за единицу перевозок (в драхмах на тонну-километр). Тяжелые колесницы наносят ущерб дорогам, который зависит от объема перевозок и равен $Q^2/4$ драхм — ровно эту сумму нужно ежегодно тратить на ремонт дорог, чтобы они не портились со временем.

Государство оплачивает ремонт дорог в полном объеме из бюджета. Мудрый Платон предложил ввести дополнительный налог на колесничих в размере t драхм с каждой единицы грузоперевозок. «Даже если ни драхмы из поступлений от нового налога не будет потрачено на ремонт дорог, введение этого налога может увеличить общественное благосостояние» — изрек великий философ.

а) (5 баллов) Объясните экономическую логику, которой руководствовался Платон.

б) (10 баллов) Проконсультировавшись с Платоном, государство определило общественное благосостояние как сумму прибыли потребителей услуг грузоперевозок (купцов), прибыли колесничих после уплаты налога, и доходов государственного бюджета от «налога Платона» за вычетом его расходов на ремонт дорог. Прибыль купцов равна $Q^2/2$; прибыль колесничих после уплаты налога также равна $Q^2/2$. Найдите ставку налога t, при которой общественное благосостояние максимально.[a]

в) (5 баллов) Государство решило ввести налог по ставке t, найденной вами в пункте **б)**, однако вскоре выяснилось, что взимание этого налога само по себе будет сопряжено с дополнительными издержками (потребуется установка специальных бортовых устройств на колесницах, найм персонала и т. д.). Расходы по взиманию налога оплачиваются из бюджета; независимо от объема перевозок, они равны C драхм. При каком максимальном значении параметра C государству, которое максимизирует благосостояние, следует вводить «налог Платона»? Обозначьте это значение за C_{max}.

г) (5 баллов) Другой философ, Аристотель, выступил с критикой налога: «Платон мне друг, но истина дороже. Введение налога повлечет за собой издержки для общества, не учтенные Платоном в его формуле общественного благосостояния, и поэтому даже при $C < C_{max}$ введение налога может не быть оправданным». Какие издержки мог иметь в виду Аристотель?

[a] Участники олимпиады, знакомые с концепцией излишков, без труда увидят, что указанные в этом пункте выражения просто равны излишкам потребителей и производителей для данных функций спроса и предложения.

Алексей Суздальцев

Решение

а) Введение этого налога приведет к снижению объема грузоперевозок, поэтому ущерб, наносимый дорогам, уменьшится. В результате на ремонт можно будет направлять меньше ресурсов. **(За это рассуждение можно было получить 3 балла)**

Общественное благосостояние в результате налогообложения может повыситься, если изначальное рыночное равновесие было неэффективным. В нашем случае эта неэффективность связана с отрицательными внешними эффектами. Участники движения не учитывают в своих решениях ущерб, который они наносят дорожному покрытию, следовательно, число грузоперевозок оказывается выше общественно оптимального. Тогда налог правильно выбранного размера будет корректировать изначально чрезмерное число поездок. **(За это рассуждение ставились полные 5 баллов за пункт А)**

б) Найдем как объем грузоперевозок зависит от ставки налога. Новая кривая предложения описывается уравнением $Q = P_d - t$; новая равновесная цена потребителя определяется уравнением $100 - P_d = P_d - t$, откуда $P^* = (100 + t)/2$, а значит, $Q^* = (100 - t)/2$. **(3 балла)**

Тогда мы можем выразить функцию общественного благосостояния через одну переменную $W = \frac{Q^2}{2} + \frac{Q^2}{2} + tQ - \frac{Q^2}{4} = \frac{3}{4}Q^2 + 100Q - 2Q^2$. **(2 балла)** Графиком этой функции является парабола с ветвями вниз. Точка максимума $Q^* = 40$. Значит, оптимальная ставка налога равна $t^* = 20$. **(5 баллов)**

Этот пункт можно решить, максимизируя благосостояние не числу перевозок, а сразу по ставке налога.

в) Для определения C_{max} необходимо найти разницу между общественным благосостоянием при введении налога и при его отсутствии. Объем перевозок в отсутствие налога равен 50, а общественное благосостояние равно $\frac{2500}{2} + \frac{2500}{2} - \frac{2500}{4} = 1875$. **(2 балла)**

При введении оптимального налога общественное благосостояние равно $\frac{1600}{2} + \frac{1600}{2} + 20 \times 40 - \frac{1600}{4} = 2000$. **(1 балл)**

$2000 - C \geqslant 1875$. Значит, налог стоит вводить при $C \leqslant 125$. $C_{max} = 125$. **(2 балла)**

г) Формула Платона учитывает только благосостояние непосредственных участников рынка грузоперевозок, однако введение налога повлияет (отрицательно) и на других экономических агентов — например, на потребителей перевозимых товаров, так как вслед за ростом цены перевозок вырастут и цены на перевозимые товары. Это может иметь макроэкономические последствия — рост цен. Кроме того, может снизиться благосостояние производителей перевозимых товаров, ведь теперь купцы будут готовы платить им меньшую оптовую цену. Сокращение транспортных перевозок между регионами со сравнительными преимуществами также может приводить к потерям. С учетом этих дополнительных издержек для общества введение налога может не быть оправданным. **(За подробное и аргументированное объяснение любого влияния налога на связанные рынки ставилось 5 баллов)**

Примечание: задача навеяна дискуссией о системе взимания платы «Платон», которая начала действовать в России осенью 2015 года. См. `https://ru.wikipedia.org/wiki/Платон_(система_взимания_платы)`

Схема оценивания

а) Идея о том, что налог приведет к снижению затрат на ремонт — **3 балла**.

Рассуждение об общественном благосостоянии — **5 баллов** за пункт **а)**.

б) Поиск равновесной цены — **3 балла**.

Переход к одной переменной в функции общественного благосостояния — **2 балла**.

Оптимальная ставка налога равна — **5 баллов**.

в) Поиск общественного благосостояния без налога — **2 балла**.

Поиск общественного благосостояния с налогом — - **1 балл**.

Поиск значения $C_{max} = 125$ — **2 балла**.

г) За подробное и аргументированное объяснение любого влияния налога на связанные рынки ставится **5 баллов**.

Задача 10. Осторожный Кузьма — 2 (25 баллов)

Кузьма, знакомый вам по задаче регионального этапа, влюбился и решил подарить девушке красивый букет.

В магазине продаются три вида цветов — A, B и C. Кузьма знает, что девушка ценит эти цветы по-разному: каждый цветок наиболее предпочтительного с ее точки зрения вида принесет ей 3 единицы радости, каждый цветок наименее предпочтительного вида принесет 1 единицу, а каждый цветок среднего по предпочтительности вида принесет 2 единицы. Проблема в том, что Кузьма забыл, какой именно вид цветов является самым предпочтительным, какой — средним, а какой — наименее предпочтительным, и спрашивать ее об этом ему неловко.

Радость девушки от букета равна сумме ее радости от каждого из цветков в букете (даже если в букете есть цветы разных видов). Девушка поцелует Кузьму, если ее радость от букета будет не меньше 30 единиц. Для простоты считайте, что количество цветов не обязательно нечетное и даже не обязательно целое (но обязательно неотрицательное).

а) **(10 баллов)** Допустим, цветок каждого из трех видов стоит 1 ден. ед. Какую минимальную сумму Кузьма должен потратить на цветы, чтобы девушка *гарантированно* его поцеловала?

б) **(5 баллов)** Как изменится ваш ответ на пункт **а)**, если цветок вида A стоит 1 ден. ед., цветок вида B — 2 ден. ед., цветок вида C — 3 ден. ед.?

в) **(10 баллов)** Допустим, радость девушки зависит не только от количества цветов разных видов, но и от их сочетания. А именно, если в букете есть цветы больше чем одного вида, их сочетание может не понравиться девушке: если сочетание цветов неудачное, радость девушки равна сумме ее радости от каждого цветка, как выше, минус Z единиц. Параметр Z известен Кузьме. Ответьте на вопрос пункта **а)** (при ценах цветов, данных в **а)**) для $Z = 24$; $Z = 36$.

Алексей Суздальцев

Решение

а) Обозначим количества цветов трех видов в букете за a, b и c. Девушка гарантированно поцелует Кузьму, если будут выполнены 6 неравенств:

$$\begin{cases} a + 2b + 3c \geqslant 30; \\ a + 3b + 2c \geqslant 30; \\ 2a + b + 3c \geqslant 30; \\ 2a + 3b + c \geqslant 30; \\ 3a + b + 2c \geqslant 30; \\ 3a + 2b + c \geqslant 30. \end{cases}$$

Нам нужно найти минимальное значение выражения $a + b + c$, при условии, что a, b и c удовлетворяют неравенствам выше.

Сложив данные 6 неравенств, получаем, что $12(a+b+c) \geqslant 6 \cdot 30$, откуда $a+b+c \geqslant 15$. При этом нижняя граница в последнем неравенстве достигается: если $a = b = c = 5$, то все 6 неравенств выполнены, и при этом $a+b+c = 15$. Значит, минимальная сумма равна 15 (и для ее достижения Кузьме следует купить букет, состоящий из 5 цветков каждого вида.)

Примечание: как видим, покупка «сбалансированного» букета позволяет в данном случае добиться существенной экономии по сравнению с «наивной» стратегией покупки 30 цветков какого-либо одного вида. Как и в задаче регионального этапа, в условиях неопределенности Кузьме выгодно осуществлять *диверсификацию* «портфеля».

б) В данном случае нам надо минимизировать значение выражения $a+2b+3c$, при условии, что a, b и c удовлетворяют неравенствам выше.

Из первого неравенства мы знаем, что $a + 2b + 3c \geqslant 30$. Нижняя граница в этом неравенстве достигается, если взять, например, $a = 30$, $b = c = 0$. (в этом случае все 6 неравенств выполнены, и $a + 2b + 3c = 30$). Таким образом, минимальная сумма в этом случае равна 30 ден. ед.

(Для ее достижения Кузьма может, например, купить букет, состоящий только из 30 цветов типа A, однако подойдет не только он, а любой букет, в котором $a \geqslant b \geqslant c$ и $a + 2b + 3c = 30$.)

Примечание: как видим, при новых ценах цветов диверсификация перестает быть выгодной, так как она начинает требовать покупки дорогих цветов, что влечет за собой рост расходов.

в) Ясно, что в этом случае Кузьме нужно отдельно рассмотреть две стратегии: покупка букета, состоящего из только одного вида цветов (в этом случае ситуация неудачного сочетания цветов исключена) и покупка букета, состоящего из более чем одного вида цветов.

Если Кузьма покупает однородный букет, ему нужно купить минимум 30 цветков, и минимальные расходы равны 30; неоднородный же букет гарантирует поцелуй, если выполнены новые 6 неравенств:

$$\begin{cases} a+2b+3c-Z \geqslant 30; \\ a+3b+2c-Z \geqslant 30; \\ 2a+b+3c-Z \geqslant 30; \\ 2a+3b+c-Z \geqslant 30; \\ 3a+b+2c-Z \geqslant 30; \\ 3a+2b+c-Z \geqslant 30. \end{cases}$$

Кузьме нужно вновь минизировать значение $a + b + c$ при этих условиях.

Действуя аналогично пункту **а)**, получаем, что $a+b+c \geqslant (30+Z)/2$. При этом нижняя граница достигается (можно взять $a = b = c = (30+Z)/6$). Поэтому минимальные расходы равны $(30+Z)/2$.

Если $Z = 24$, эти расходы равны $(30 + 24)/2 = 27 < 30$, и значит Кузьме нужно покупать неоднородный букет, состоящий из 9 цветков каждого вида.

Если $Z = 36$, расходы равны $(30 + 36)/2 = 33 > 30$, и значит, лучше не рисковать, а купить однородный букет (из 30 цветков какого-либо вида).

Ответ: при $Z = 24$ минимальные расходы равны 27; при $Z = 36$ минимальные расходы равны 30.

Примечание: в данном пункте диверсификация по условию сопряжена с определенными издержками сама по себе. Если эти издержки относительно небольшие ($Z = 27$), то диверсификацию выгодно осуществлять, несмотря на них; если же они достаточно большие ($Z = 36$), то диверсификация становится невыгодной.

Схема оценивания

а) Правильный ответ с указанием набора, позволяющего гарантированно «купить» поцелуй (без доказательства): **5 баллов**

Правильный ответ с доказательством, использующим априори равное количество цветов в наборах: **6 баллов**

Правильный ответ с аккуратным доказательством: **10 баллов**

Штрафы:

- Доказательство на множестве дискретных случаев: **–1 балл**
- Доказательство необходимости равенства количества цветов в наборах по три цветка без аккуратного обобщения на целый букет (то есть нахождение локального максимума, а не глобального): **–1 балл**

б) Правильный ответ с указанием набора, гарантирующего поцелуй за 30 ден. ед.: **1 балл**

Правильный ответ с аккуратным доказательством: **5 баллов**

Штрафы:

- Исключение цветка С из рассмотрения: **–2 балла**
- Правильное доказательство на множестве дискретных случаев: **–3 балла**
- Неверное доказательство на множестве дискретных случаев: **–4 балла**
- Рассмотрение только конечных вариантов наборов: **–4 балла**

в) Правильный ответ с аккуратными выводами и доказательствами: **10 баллов**

Штрафы:

- Не рассматриваются наборы, состоящие из цветов двух типов, без доказательства, что такой набор не оптимальный: **–2 балла**
- Рассматривается случай равенства цветов в наборе без доказательств или ссылок на доказательства в пункте **а)**: **–1 балл**
- Отсутствие сравнений с затратами на моно-букет: **–7 баллов**

Примечание: если в каком-либо пункте для расчётов и доказательств использовались вероятности, то за этот пункт ставилось **0 баллов**

Задача 11. Рациональные пингвины — 2 (25 баллов)

У императорских пингвинов яйца высиживают самцы. С началом антарктической зимы они получают яйца от самок и держат их между лап около двух месяцев, пока самки находятся в море. Эти два месяца самцы проводят в очень тяжелых условиях: температура может достигать −50 °C, а скорость ветра — 200 км/ч.

Чтобы согреться, пингвины собираются в большие толпы (иногда их там больше тысячи). Находясь на расстоянии всего 2 см друг от друга, они минимизируют напрасный расход тепла. В результате воздух в середине этой кучи пингвинов может прогреваться до 37 °C, что слишком жарко по сравнению с комфортной температурой. Пингвины, которые находятся с краю толпы, наоборот, мерзнут, стоя под сильным ветром. В результате движения, однако, положение пингвинов в толпе постоянно меняется, скопления разбиваются на более мелкие или наоборот сливаются. Это позволяет каждому пингвину поочередно находиться в середине толпы, где слишком жарко, в более комфортной ее части или с самого краю, где слишком холодно.

а) (13 баллов) Приведите экономический аргумент, который может объяснить, почему пингвины встают так близко друг к другу, несмотря на то, что в центре кучи от этого слишком жарко.

б) (6 баллов) Каждый отдельный пингвин приходит в толпу за тем, чтобы согреться, но в итоге (ненамеренно) тратит часть своего тепла, чтобы согреть окружающих — это похоже на положительный внешний эффект. Стандартная экономическая теория содержит результат, что производство положительных внешних эффектов обычно ниже общественно оптимального уровня, однако в случае императорских пингвинов это, вероятно, не так: сложно представить себе более эффективную структуру, которая бы включала больше обмена теплом. Объясните, почему стандартный аргумент о недопроизводстве положительного внешнего эффекта может не работать в такой ситуации.

в) (6 баллов) Приведите аналогичные (в смысле идеи пункта **б)**, но не связанные с обменом теплом) примеры, характерные для благ, производством и потреблением которых занимаются люди.

Данил Фёдоровых

Решение

а) Пингвины в куче делятся на три группы: 1) те, кому слишком холодно; 2) те, кому слишком жарко; 3) те, кому в самый раз. Экономический аргумент, объясняющий описанную ситуацию, состоит из трех частей: стимулы пингвинов в каждой из групп, которым некомфортно, и возникающей в результате реакции на этим стимулы равновесной ситуации.

У групп 1) и 2) есть стимулы к тому, чтобы менять сложившуюся ситуацию: пингвины снаружи кучи хотят двигаться внутрь, а пингвины в центре — выбраться наружу. Если бы пингвины в центре кучи находились на более комфортном расстоянии, то у них не было бы стимулов двигаться и менять свое положение. Но тогда те пингвины, которые стоят с краю, всегда там бы и оставались и замерзали бы насмерть. В конце концов, те пингвины, которые сейчас в центре, рано или поздно оказались бы с краю и замерзли тоже. Движение всей кучи — в интересах даже тех пингвинов, кто сейчас не мерзнет, они готовы рано или поздно выполнить свой долг и постоять с краю.

б) Стандартная теория подразумевает, что производство блага, связанного с внешним эффектом, затратно. Например, если кто-то делает прививку от гриппа, то он снижает не только свою вероятность заразиться, но и вероятность заразиться для окружающих, создавая тем самым положительный внешний эффект. Для кого-то стоимость вакцины может превысить его собственную выгоду, но быть меньше суммарной выгоды его и окружающих (которые он не учитывает при принятии решения) — поэтому прививок в равновесии делается меньше, чем оптимальное число. В случае пингвинов, однако, создание положительного эффекта для окружающих бесплатно (каждый тратит на обогрев других только то тепло, которым иначе обогревал бы воздух), поэтому частные выгоды превышают частные издержки для каждой особи. Кроме того, что важно, существует максимальное значение производства данного «блага»: каждый пингвин принимает решение, вступить в кучу или нет. Можно представить себе равновесную ситуацию, в которой все пингвины приняли решение участвовать в процессе, но недопроизводства по сравнению с оптимумом нет, потому что достигнут верхний предел. Таким образом, ключевыми свойствами ситуациями, обеспечивающими вероятную эффективность, является конечность (дискретность) блага и низкие издержки его «производства».

в) Нужно найти примеры положительного внешнего эффекта с бесплатным или очень дешевым производством отдельной единицы, а также с просто ограниченным сверху возможным объемом производства. В частности, это могут быть **сетевые блага**: телефоны и социальные сети. Частные издержки подключения к такой сети низки, поэтому внешний эффект, создаваемый подключением, не влияет или не сильно влияет на эффективность.

Схема оценивания

а) Определение стимулов каждой из групп — **по 4 балла**, описание равновесия — **5 баллов**.

б) За конечность/дискретность — **2 балла**, за низкие частные издержки — 4 балла.

в) Корректный пример с объяснением оценивается в 6 баллов. Если участник приводит пример без объяснения (то есть без построения аналогии с предыдущим пунктом), то определить, понимает ли он аналогию, невозможно, поэтому за любой пример положительной экстерналии ставится **1 балл**.

Задача 12 (25 баллов)

В N-ске есть 150 человек, которым утром нужно улететь в Москву (возвращаться они не планируют). Готовность платить за билет каждого из них зависит от времени вылета рейса; для каждого пассажира существует некое идеальное для него время вылета, и чем больше отклонение фактического времени от идеального, тем меньше его готовность платить. Готовность платить пассажира i можно рассчитать по формуле

$$V_i(t) = 8 - 2|t - t_i^\star|,$$

где $V_i(t)$ — максимальная цена, которую пассажир i готов заплатить за билет (в тыс. руб.), t — фактическое время вылета, а $t_i^\star$ — идеальное время вылета с точки зрения пассажира i.

Разные пассажиры предпочитают разное время вылета. Количество пассажиров с соответствующими значениями $t_i^\star$ представлено в таблице.

$t_i^\star$	n
6 ч. утра	30
7 ч. утра	40
8 ч. утра	60
9 ч. утра	20

В связи с небольшим размером рынка рейсы из N-ска в Москву организует только одна авиакомпания — «N-авиа». В распоряжении авиакомпании есть один самолет вместимостью как раз 150 человек. Издержки на осуществление рейса равны 500 тыс. руб. независимо от количества проданных билетов и времени вылета. Компания стремится к тому, чтобы ее прибыль от рейса была максимальной.

а) (8 баллов) Предположим, компания назначает единую цену на все билеты. Какую цену она назначит и какое время вылета она выберет (время вылета необязательно целое)?

б) (17 баллов) Предположим, что, несмотря на то, что все места в самолете одинаковые, компания может назначать на них разные цены (вплоть до того, что каждое из 150 мест может быть продано по своей цене). В этом случае процесс взаимодействия компании с потенциальными пассажирами устроен так:

1. Компания определяет время вылета и цены на разные места и публикует эту информацию на сайте;
2. Когда человек заходит на сайт компании, он, видя время вылета и цены, решает, будет ли он покупать билет. Если он покупает билет, то он покупает самое дешевое место из оставшихся.

Предположим, что чем раньше для человека идеальное время вылета, тем раньше он приходит на сайт для покупки билетов (те, кто привык рано вставать, привыкли все дела делать раньше).[a] Найдите время вылета, которое выберет авиакомпания, и определите, сколько ценовых категорий мест она выделит, каковы будут количество мест и цена билета в каждой категории. Укажите в ответе все оптимальные для авиакомпании варианты.

[a] Более реалистично было бы предполагать случайный порядок захода посетителей на сайт, однако такая предпосылка значительно усложняет решение.

Алексей Суздальцев

Решение

а) Меняя время вылета t, фирма меняет готовность потребителей платить и тем самым кривую спроса на билеты. Поэтому один из способов решения задачи — найти кривую спроса, оптимальную цену и максимальную прибыль при каждом t, а затем промаксимизировать эту прибыль по t.

Этот способ, однако, трудоемок. В данном случае легче найти, какое t максимизирует спрос при данном p, затем уже максимизировать прибыль по p.

При цене p захотят купить билет потребители, для которых $t_i \in [t-(8-p)/2; t+(8-p)/2]$. Это отрезок длины $(8-p)$ с центром в точке t.

Заметим, что при $p \leqslant 5$ тыс. руб., всегда можно найти отрезок длины $8-p$, накрывающий множество $t_i^\star \in \{6, 7, 8, 9\}$. Например, можно выбрать отрезок с центром $t = 7{,}5$. Иными словами, в этом случае фирма всегда может выбрать t так, чтобы билеты захотели купить все 150 человек — достаточно выбрать $t = 7:30$ утра. Максимальная выручка в данном случае достигается при цене 5 и равна $5 \cdot 150 = 750$.

При $p \in (5; 6]$, отрезком длины $8-p$ можно накрыть максимум 3 (смежных) группы потребителей. Если накрыть группы с идеальным временем $t_i^\star \in \{6, 7, 8\}$, спрос предъявят 130 человек, а если накрыть группы с идеальным времени 7, 8 и 9 часов, спрос предъявят 120 человек. Максимальная выручка равна $130 \cdot 6 = 780$, для ее достижения нужно назначить $t = 7$ утра.

При $p \in (6; 7]$, отрезком длины $8-p$ можно накрыть максимум 2 (смежных) группы потребителей. Если накрыть группы с идеальным временем 6 и 7 часов, спрос предъявят 70 человек; 7 и 8 часов — 100 человек; 8 и 9 часов — 80 человек. Максимальная выручка равна $100 \cdot 7 = 700$, для ее достижения нужно назначить $t = 7:30$ утра.

При $p \in (7; 8]$, отрезком длины $8-p$ можно накрыть максимум 1 группу потребителей. Это должна быть самая многочисленная группа. Таким образом, максимальная выручка в данном случае равна $8 \cdot 60 = 480$, для ее достижения нужно назначить $t = 8$ утра.

При $p > 8$ ни один потребитель не приобретет билет ни при каком времени вылета.

Сравнивая выручку во всех случаях выше, получаем, что оптимальным является назначение цены 6 тыс. руб. за билет и времени вылета 7 часов утра. (Прибыль фирмы составит 280 тыс. руб.)

б) Для лучшего понимания происходящего рассмотрим пару примеров. Фирме имеет смысл выделять несколько ценовых категорий билетов, если она сможет продать билеты дороже тем, кто готов за них платить больше. Для этого необходимо, чтобы больше была готовность платить именно тех потребителей, кто позже приходит на сайт. Например, если установить время вылета $t = 9$ часов утра, то готовности платить для четырех групп будут равны $(2; 4; 6; 8)$ тыс. руб, и если фирма выделит 4 категории билетов: 30 билетов по 2 тыс., 40 билетов по 4 тыс., 60 билетов по 6 тыс., и 20 билетов по 8 тыс., она сможет продать билет каждому потребителю по его готовности платить, и в итоге получит выручку 740 тыс. руб, что гораздо больше, чем максимальная выручка при $t = 9$, если назначать единую цену (480 тыс. руб.).

С другой стороны, если установить время вылета $t = 7$ часов утра, то готовности платить будут равны $(8; 6; 4; 2)$ тыс. руб, и трюк с выделением нескольких категорий не пройдет, так как самая ранняя группа купит билеты по 2, а не по 8, и.т.д. В этом случае фирма не сможет заработать выручку больше, чем в случае установления единой цены.

Несмотря на то, что при $t = 9$ фирма может изъять у каждого потребителя его готовность платить, не факт что $t = 9$ является оптимальным, ведь фирма, меняя t, может менять сами готовности платить. Тем не менее, из примеров выше становится ясно, что ценовая дискриминация будет приносить выгоду скорее при больших t, чем при маленьких.

Теперь перейдем непосредственно к решению задачи. Будем называть группы потребителей по идеальному для них времени вылета; за V_t обозначим готовность платить члена группы с идеальным временем t.

Заметим, что при оптимальной для фирме ценовой политике выполнено следующее: если некая группа потребителей покупает билеты, то все группы, для которых идеальное время вылета меньше, тоже покупают билеты. Действительно, если это не так, то фирма может опустить цену на часть билетов так, чтобы более «ранние» группы купили их, не меняя поведение более «поздних» групп, и прибыль ее увеличится.

Таким образом, в оптимуме возможны 4 варианта: (1) Все потребители покупают билеты; (2) Только группы 6, 7, 8 покупают билеты; (3) Только группы 6 и 7 покупают билеты; (4) Только группа 6 покупает билеты.

Будем рассматривать эти 4 случая по отдельности.

Случай 1. Очевидно, что имеет смысл рассматривать только $t \in [6; 9]$. Встанем в $t = 9$ и будем уменьшать t. При $t \in [8{,}5; 9]$ готовности платить V_6, V_7, V_8 и V_9 будут удовлетворять соотношению $V_6 \leqslant V_7 \leqslant V_8 \leqslant V_9$. Выделяя 4 категории билетов — 30 билетов по V_6 тыс., 40 билетов по V_7 тыс., 60 билетов по V_8 тыс., и 20 билетов по V_9 тыс, фирма сможет изъять у каждого потребителя его готовность платить. При этом при уменьшении t суммарная готовность платить групп 6, 7 и 8 растет сильнее, чем падает суммарная готовность платить группы 9 (так как $2 \cdot (30+40+60) > 2 \cdot 20$), и поэтому максимальная выручка на этом участке достигается при $t = 8{,}5$; несложно посчитать, что она равна 850 тыс. руб. При $t \in [8; 8{,}5)$ будет выполнено соотношение $V_6 \leqslant V_7 \leqslant V_9 \leqslant V_8$, и потому, чтобы продать билеты всем группам, фирме придется установить единую цену для групп 8 и 9, равную V_9 (для групп 6 и 7 цены по-прежнему равны V_6 и V_7). При этом на этом участке выручка уменьшается при уменьшении t, так как $2 \cdot (30 + 40) < 2 \cdot (20 + 60)$.

При $t \in [7{,}5; 8)$ фирме придется устанавливать единую цену для групп 7, 8 и 9, равную V_9; выручка по-прежнему будет уменьшаться при уменьшении t, так как $2 \cdot 30 < 2 \cdot (40 + 20 + 60)$. При $t < 7{,}5$ фирме придется устанавливать единую цену на все билеты, чтобы все группы купили билет. Эта цена равна V_9, и поэтому выручка, очевидно, будет убывать при уменьшении t.

Таким образом, оптимальным временем вылета в данном случае является $t = 8{,}5$. При этом времени вылета фирма предложит 30 билетов по 3000, 40 билетов по 5000 и 80 билетов по 7000. Выручка составит 850 тыс. руб.

Случай 2. Очевидно, что имеет смысл рассматривать только $t \in [6; 8]$. (Про группу 9 забудем, будем считать, что фирма предлагает только 130 билетов.) Встанем в $t = 8$ и будем уменьшать t. Аналогично Случаю 1, при $t \in [7{,}5; 8]$ готовности платить V_6, V_7 и V_8 будут удовлетворять соотношению $V_6 \leqslant V_7 \leqslant V_8$, и потому фирма сможет изъять у каждой из трех групп ее излишек, выделяя три ценовые категории. При этом выручка будет возрастать при уменьшении t, так как $2 \cdot (30 + 40) > 2 \cdot 60$. На этом участке оптимальным является $t = 7{,}5$, несложно посчитать, что максимальная выручка опять равна 850 тыс. руб.

При $t < 7{,}5$ фирме придется назначать единую цену для групп 7 и 8, равную V_8; так как $2 \cdot 30 < 2 \cdot (40 + 60)$, выручка будет убывать при уменьшении t. При $t < 7$ цена должна быть общей для всех трех групп, и выручка вновь будет убывать при уменьшении t.

Таким образом, оптимальным временем вылета в данном случае является $t = 7{,}5$. При этом времени вылета фирма предложит 30 билетов по 5000 и 100 билетов по 7000. Выручка составит 850 тыс. руб.

Случай 3. Очевидно, что выручка фирмы не больше $8 \cdot (30 + 40) < 850$, и потому этот вариант не может быть оптимальным.

Случай 4. Очевидно, что выручка фирмы не больше $8 \cdot 30 < 850$, и потому этот вариант не может быть оптимальным.

Ответ:

Первый вариант: вылет в 7:30 утра, и предлагаются 30 билетов по 5000 и 100 билетов по 7000.

Второй вариант: вылет в 8:30 утра, и предлагаются 30 билетов по 3000, 40 билетов по 5000 и 80 билетов по 7000.

В обоих случаях прибыль компании составит 350 тыс. руб.

Схема оценивания

а)
- Разумные вводные соображения (и больше ничего): **2 балла**. Например, если доказано, что следует ограничиться временем вылета от 6 до 9.
- Перебор, который не привёл к правильному ответу из-за ошибок или неполноты: **4 балла**.
- Перебор по времени, рассмотрены только случаи $t \in \{7, 8\}$: **4 балла**.
- Перебор, который привёл к правильному ответу, но был недостаточно обоснован: **6 баллов**.
- Аккуратный перебор всех случаев, иное полное решение: **8 баллов**.
- Использование явно неверного утверждения в рассуждениях: штраф **2 балла**.

б)
- Разумные вводные соображения (и больше ничего): 2 балла.
- Описана и проведена процедура выбора p_i для некоторых фиксированных $t^\star$ (например, для $t^\star = 9$ или всех целых $t^\star$): **5 баллов**.
- Проведён перебор, который из-за погрешностей привёл к получению одного оптимума из двух возможных: **10 баллов**.
- Получены оба оптимума, но в обосновании есть погрешности: **15 баллов**.
- Верный ответ и полное обоснование: **17 баллов**.
- Использование явно неверного утверждения в рассуждениях: штраф **2 балла**.