

8 класс

1. Подберите такие не равные нулю числа n и m , чтобы равенство $(n \cdot 5^n)^n = m \cdot 5^9$ было верным.

Решение.

Таких пар чисел бесконечно много.

Покажем одно из самых естественных решений. Нам нужно, чтобы $n^n \cdot 5^{n^2} = m \cdot 5^9$. Если $n = 3$, то $5^{n^2} = 5^9$. Теперь вычислим m : $m = 3^3 = 27$. Пара $n = 3$, $m = 27$ является решением.

Покажем, как можно получить другие решения. Возьмем произвольное n . Например, $n = 6$.

Тогда в левой части равенства мы получаем: $6^6 \cdot 5^{36}$, следовательно, $m = 6^6 \cdot 5^{27}$.

Критерии проверки.

- Приведена верная пара чисел n и m и показано, что при таких n и m получается верное равенство (или показано, как найти n и m , или проведена проверка) – **7 баллов**.
- Приведена верная пара чисел n и m без каких-либо пояснений – **5 баллов**.
- Показано, что n может быть равно 3, но для этого n неверно найдено m – **2 балла**.
- Приведен только верный ответ – **1 балл**.
- Приведен верный ответ при неверных рассуждениях – **0 баллов**.

2. В подводном царстве живут осьминоги с семью и восемью ногами. Те, у кого 7 ног, всегда врут, а те, у кого 8 ног, всегда говорят правду. Однажды между тремя осьминогами состоялся такой разговор.

Зеленый осьминог: «У нас вместе 24 ноги».

Синий осьминог: «Ты прав!»

Красный осьминог: «Глупости, Зелёный говорит ерунду!»

Сколько ног было у каждого осьминога? (Ответ обоснуйте.)

Ответ. У Зеленого осьминога 7 ног, у Синего осьминога 7 ног, у Красного осьминога 8 ног.

Решение. Из условия задачи следует, что количество ног и правдивость высказываний связаны однозначно. Синий и Красный осьминоги про слова Зеленого осьминога произнесли противоречащие друг другу фразы. Значит, кто-то из них сказал правду, а кто-то ложь. А это, в свою очередь, означает, что у кого-то из них 7 ног. Таким образом, слова Зеленого осьминога – ложь (в противном случае у каждого из трех осьминогов должно быть по 8 ног, иначе общее количество ног меньше 24). Подведем итоги: Зеленый осьминог сказал ложь, у него 7 ног; тогда Синий осьминог сказал ложь, у него 7 ног, а Красный осьминог сказал правду, у него 8 ног.

Критерии проверки.

- Приведен полный верный анализ ситуации задачи и дан верный ответ – **7 баллов**.
- Приведен верный анализ ситуации, но по каким-либо причинам дан неверный ответ (например, перепутана связь между количеством ног и правдивостью высказываний) – **5-6 баллов**.
- Приведен верный ответ и показано, что он удовлетворяет условию задачи (проведена проверка) – **3 балла**.
- Приведен только верный ответ – **1 балл**.
- Приведен верный ответ при неверных рассуждениях – **0 баллов**.

3. Фирма изготавливает лимонный напиток, разбавляя лимонный сок водой. Сначала фирма производила напиток, содержащий 15% лимонного сока. Через некоторое время генеральный

директор отдал указание снизить содержание лимонного сока до 10%. На сколько процентов увеличится количество производимого лимонного напитка при тех же объёмах поставок лимонов?

Ответ. На 50%.

Решение. 1 способ. Содержание лимонного сока в напитке после указания генерального директора снизилось в полтора раза. Значит, из тех же лимонов можно приготовить в полтора раза больше лимонного напитка. Иными словами, количество производимого лимонного напитка увеличится в полтора раза или на 50%.

2 способ. Пусть x – количество производимого напитка до указания генерального директора. Тогда количество лимонного сока в этом напитке – $0,15 \cdot x$. Пусть теперь y – количество производимого напитка после указания генерального директора. Тогда количество лимонного сока в этом напитке – $0,1 \cdot y$. Так как подразумевается, что количество лимонного сока не изменилось, получаем равенство $0,15 \cdot x = 0,1 \cdot y$. Умножив обе части этого равенства на 10, получим: $y = 1,5 \cdot x$; или: $y = x + 0,5 \cdot x$. Значит, количество производимого напитка увеличилось на 50%.

Критерии проверки.

- Полное решение – **7 баллов.**
- Верно составлено уравнение по условию задачи, но дальнейшие рассуждения отсутствуют или ошибочны – **2 балла.**
- Верный ответ получен с помощью введения конкретного количества (например, 100 литров) производимого напитка или лимонного сока – **1 балл.**
- Приведен только верный ответ или верный ответ, сопровождаемый неверными рассуждениями – **0 баллов.**

4. Все натуральные числа, сумма цифр в записи которых делится на 5, выписывают в порядке возрастания: 5, 14, 19, 23, 28, 32, ... Чему равна самая маленькая положительная разность между соседними числами в этом ряду? Приведите пример и объясните, почему меньше быть не может.

Ответ. Наименьшая разность равна 1, например, между числами 49999 и 50000.

Решение. Разность меньше 1 быть не может, так речь идет про разность различных натуральных чисел.

Комментарий. Как догадаться до решения.

Понятно, что если два соседних числа отличаются только в разряде единиц, то разность между ними равна 5 (например, 523 и 528). Значит, нужно, чтобы числа отличались и в других разрядах. Можно попробовать взять большее число круглым, тогда числа будут отличаться минимум в двух разрядах. Возьмем, например, 50, предыдущее число 46, а разность равна 4. Если взять 500, то предыдущее число 497 и разность равна 3. Осталось подобрать такое число нулей, чтобы разность была равна 1.

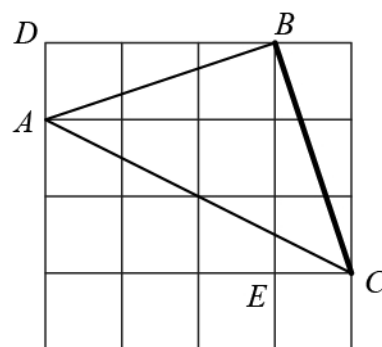
Критерии проверки.

- Приведен пример требуемых чисел с разностью 1 – **7 баллов.**
- Приведены рассуждения, позволяющие сконструировать последовательные числа ряда с минимальной разностью, и сконструированы числа, разность между которыми 2, но не сконструированы числа, дающие разность 1 – **4 балла.**
- Приведены примеры, показывающие, что разность может быть меньше 4, но без обоснования минимальности – **2 балла.**
- Остальные случаи – **0 баллов.**

5. На стандартном тетрадном листе в клетку нарисован угол (см. рисунок). Найдите его величину, не используя измерительные инструменты. Ответ обоснуйте.

Ответ. 45° .

Решение. Соединим две «крайние» точки отрезком (как на рисунке). Получившийся треугольник – равнобедренный, так как две его стороны AB и BC являются диагоналями трёхклеточных прямоугольников. Диагональ AB делит угол прямоугольника с вершиной B на два угла, дополняющих друг друга до прямого. Треугольники ADB и CEB равны по двум катетам, значит, равны их соответствующие углы. И значит, угол CBE дополняет угол ABE до прямого. Таким образом, треугольник ABC – равнобедренный и прямоугольный. Его углы A и C при основании AC равны по свойству равнобедренного треугольника и имеют величину 45° по теореме о сумме углов треугольника.



Комментарий. Если соединить точку B с серединой AC , мы также получим равнобедренный прямоугольный треугольник. Рассуждения аналогичны.

Критерии проверки.

- Приведено верное обоснованное решение – **7 баллов**.
- Приведены в целом верные рассуждения, в которых допущены ошибки, не имеющие для сути решения принципиального характера, и дан верный ответ – **5 баллов**.
- Сделаны дополнительные построения и обозначения на чертеже, из которых ясен ход решения, дан верный ответ, но не приведены сами рассуждения – **3 балла**.
- Приведен верный ответ без обоснования либо с неверным обоснованием – **0 баллов**.

6. На координатной плоскости есть точки, координаты $(x;y)$ которых удовлетворяют уравнению $y(x+1) = x^2 - 1$. Например, одна из них – точка с координатами $(1;0)$. Изобразите *все* точки, координаты $(x;y)$ которых удовлетворяют этому уравнению.

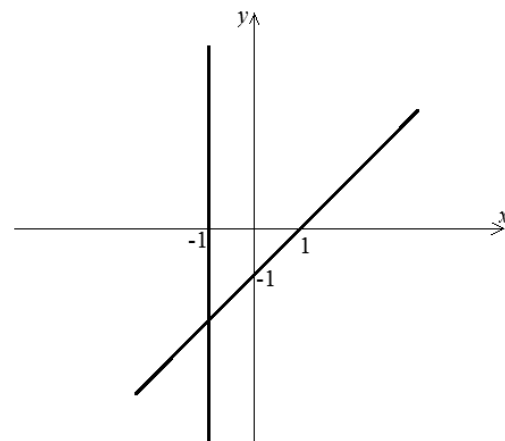
Ответ. См. рисунок.

Решение. Преобразуем уравнение следующим образом:

$$y(x+1) = (x-1)(x+1);$$

$$y(x+1) - (x-1)(x+1) = 0;$$

$(x+1)(y-x+1) = 0$. Отсюда $x = -1$ или $y = x - 1$. Таким образом, все точки с координатами, удовлетворяющими уравнению, представляют собой совокупность двух прямых: прямой, параллельной оси ординат и проходящей через точку $(-1;0)$ и прямой, являющейся графиком функции $y = x - 1$ (см. рисунок).



Критерии проверки.

- Верно проведены преобразования и верно построено множество точек – **7 баллов**.
- Верно проведены преобразования, выделены два случая, но множество точек для какого-либо из них не построено или построено неверно – **4 балла**.

- Верно проведены ключевые преобразования, но множество точек не построено или построено неверно – **3 балла**.
- Потерян случай $x + 1 = 0$ (например, за счет «сокращения» обеих частей уравнения на это выражение) и построена только прямая « $y = x - 1$ » – **2 балла**.
- Указано несколько точек с подходящими координатами и через них проведены (пусть даже и правильно) прямые или отрезки без каких-либо дополнительных рассуждений – **0 баллов**.
- Указано несколько точек с подходящими координатами – **0 баллов**.
- Указано несколько точек с подходящими координатами и через них проведены (пусть даже и правильно) прямые или отрезки без каких-либо дополнительных рассуждений – **0 баллов**.