

11 класс

Второй день

- 11.5. Бессмертная блоха прыгает по целым точкам на числовой прямой, стартуя с точки 0. Длина первого прыжка равна 3, второго — 5, третьего — 9, и так далее (длина k -го прыжка равна $2^k + 1$). Направление прыжка (вправо или влево) блоха выбирает самостоятельно. Может ли так случиться, что блоха рано или поздно побывает в любой натуральной точке (возможно, побывав в некоторых точках больше, чем по разу)?
- 11.6. Действительные числа a, b, c, d , по модулю большие единицы, удовлетворяют соотношению

$$abc + abd + acd + bcd + a + b + c + d = 0.$$

Докажите, что

$$\frac{1}{a-1} + \frac{1}{b-1} + \frac{1}{c-1} + \frac{1}{d-1} > 0.$$

- 11.7. Неравнобедренный треугольник ABC вписан в окружность ω . Касательная к этой окружности в точке C пересекает прямую AB в точке D . Пусть I — центр окружности, вписанной в треугольник ABC . Прямые AI и BI пересекают биссектрису угла CDB в точках Q и P соответственно. Пусть M — середина отрезка PQ . Докажите, что прямая MI проходит через середину дуги ACB окружности ω .
- 11.8. Даны натуральные числа a и b , причём $a < b < 2a$. На клетчатой плоскости отмечены некоторые клетки так, что в каждом клетчатом прямоугольнике $a \times b$ или $b \times a$ есть хотя бы одна отмеченная клетка. При каком наибольшем α можно утверждать, что для любого натурального N найдётся клетчатый квадрат $N \times N$, в котором отмечено хотя бы αN^2 клеток?

11 класс

Второй день

- 11.5. Бессмертная блоха прыгает по целым точкам на числовой прямой, стартуя с точки 0. Длина первого прыжка равна 3, второго — 5, третьего — 9, и так далее (длина k -го прыжка равна $2^k + 1$). Направление прыжка (вправо или влево) блоха выбирает самостоятельно. Может ли так случиться, что блоха рано или поздно побывает в любой натуральной точке (возможно, побывав в некоторых точках больше, чем по разу)?
- 11.6. Действительные числа a, b, c, d , по модулю большие единицы, удовлетворяют соотношению

$$abc + abd + acd + bcd + a + b + c + d = 0.$$

Докажите, что

$$\frac{1}{a-1} + \frac{1}{b-1} + \frac{1}{c-1} + \frac{1}{d-1} > 0.$$

- 11.7. Неравнобедренный треугольник ABC вписан в окружность ω . Касательная к этой окружности в точке C пересекает прямую AB в точке D . Пусть I — центр окружности, вписанной в треугольник ABC . Прямые AI и BI пересекают биссектрису угла CDB в точках Q и P соответственно. Пусть M — середина отрезка PQ . Докажите, что прямая MI проходит через середину дуги ACB окружности ω .
- 11.8. Даны натуральные числа a и b , причём $a < b < 2a$. На клетчатой плоскости отмечены некоторые клетки так, что в каждом клетчатом прямоугольнике $a \times b$ или $b \times a$ есть хотя бы одна отмеченная клетка. При каком наибольшем α можно утверждать, что для любого натурального N найдётся клетчатый квадрат $N \times N$, в котором отмечено хотя бы αN^2 клеток?