Х. 1 СИНХРОННЫЕ СПУТНИКИ

О.С. Угольников

? Два искусственных спутника Земли при наблюдении из определенной точки экватора нашей планеты всегда одновременно восходят, проходят через зенит и заходят за горизонт. Орбиты спутников круговые, расположены в экваториальной плоскости, спутники движутся по ним вокруг Земли в одном направлении. При этом радиусы орбит отличаются ровно вдвое. Найдите эти радиусы орбит. Суточным параллаксом спутников пренебречь.

! Спутники обращаются вокруг Земли в той же плоскости, что и сам наблюдатель за счет осевого вращения Земли. Одновременный восход, кульминация в зените и заход спутников в пренебрежении параллаксом означает равенство их синодических периодов *S*. Для этих периодов справедливо соотношение:

$$\frac{1}{S_{1,2}} = \left|\frac{1}{T_0} \pm \frac{1}{T_{1,2}}\right|; \quad \left|\frac{1}{T_0} \pm \frac{1}{T_1}\right| = \left|\frac{1}{T_0} \pm \frac{1}{T_2}\right|.$$

Здесь $T_{1,2}$ – орбитальные периоды спутников, T_0 – период осевого вращения Земли (23.934 часа). Знак "+" соответствует встречному вращению спутника по отношению к вращению Земли, знак "–" будет иметь место в случае одного направления вращения Земли и спутника. Коль скоро известно, что спутники движутся вокруг Земли в одном направлении, эти знаки для них должны быть одинаковы. В случае знака "+" выражения под модулем положительны, и равенство выполняется только для одинаковых орбит (T_1=T_2), что противоречит условию задачи. Итак, мы должны рассмотреть случай со знаками "–":

$$\left|\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T_1}\right| = \left|\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T_2}\right|.$$

Мы вновь не рассматриваем тривиальный случай T_1=T_2. Пусть T_2>T_1, тогда $(1/T_1)>(1/T_2)$. Равенство может быть выполнено, если выражение под модулем в левой части будет отрицательным, в правой части – положительным, то есть:

$$\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_0} = \frac{1}{T_0} - \frac{1}{T_2}.$$

Это выражение можно переписать как

$$\frac{T_1 T_0}{T_0 - T_1} = \frac{T_2 T_0}{T_2 - T_0}.$$

Отсюда

$$T_1(T_2 - T_0) = T_2(T_0 - T_1).$$

Вспомним, что $T_2 > T_1$, а радиусы орбит спутников отличаются в 2 раза. По III закону Кеплера

$$\frac{T_2}{T_1} = K = 2^{3/2}.$$

Подставляя это в соотношение периодов, имеем:

$$KT_1^2 - T_1T_0 = KT_1T_0 - KT_1^2.$$

Решая это уравнение, получаем:

$$T_1 = \frac{(K+1)T_0}{2K}; \quad T_2 = KT_1 = \frac{(K+1)T_0}{2}.$$

Численные значения периодов равны 16.20 и 45.82 часа. Радиусы орбит спутников составляют

$$R_{1,2} = \left(\frac{GMT_{1,2}^2}{4\pi^2}\right)^{1/3}.$$

Здесь M – масса Земли. Радиусы орбит равны 32.4 и 64.8 тысячи километров.

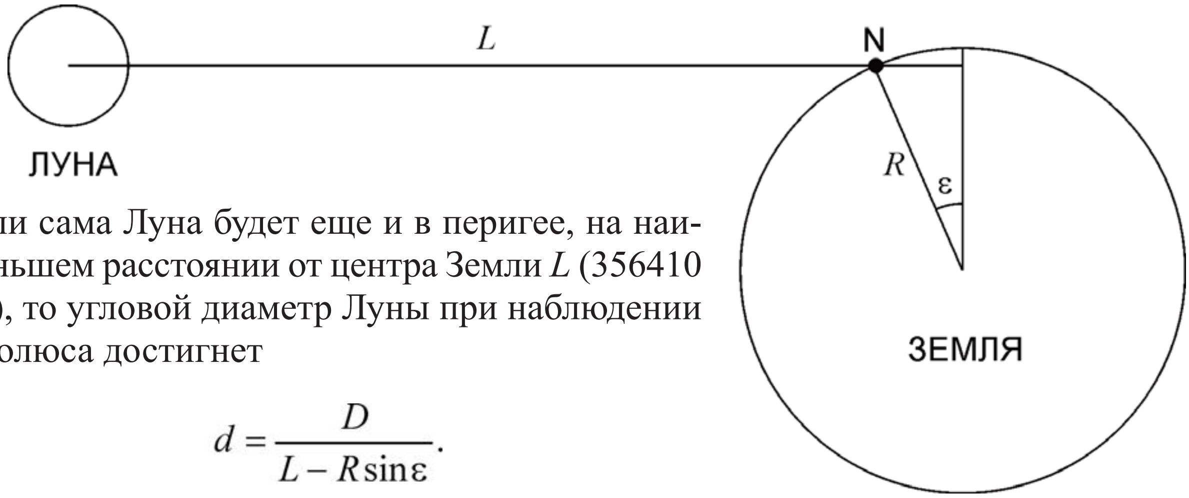
X. 2 ЗАТМЕНИЕ НА ПОЛЮСЕ

А.Н. Акиньщиков

? 20 марта 2015 года произошло полное солнечное затмение, которое было видно на северном полюсе Земли. Продолжительность полной фазы там составила около 2 минут. Определите, какая максимальная продолжительность полной фазы может вообще быть у солнечного затмения на северном полюсе Земли.

! Очевидно, двухминутное полное солнечное затмение – не самое продолжительное, которое может случиться на северном полюсе Земли. Затмение 2015 года наступило в весеннее равноденствие, и Солнце и Луна едва появились над горизонтом за счет явления атмосферной рефракции. В это время расстояние до Луны не было минимально возможным. Солнце, в свою очередь, не было в своей самой удаленной точке от Земли.

Затмение с наибольшей продолжительностью может наступить на северном полюсе в конце июня – начале июля. В это время Солнце и Луна будут располагаться на высоте ε (около 23.4°), и точка наблюдения будет приближена к Луне (см. рисунок):



Если сама Луна будет еще и в перигее, на наименьшем расстоянии от центра Земли L (356410 км), то угловой диаметр Луны при наблюдении с полюса достигнет

$$d = \frac{D}{L - R\sin\varepsilon}.$$

Здесь R – полярный радиус Земли. В угловой мере величина d составит $33'46''$. Солнце в июне – начале июля, напротив, находится дальше всего от Земли, и его угловой диаметр d_0 уменьшается до $31'31''$. Полное солнечное затмение может продолжаться, пока Луна преодолевает на небе относительно Солнца угловое расстояние $d - d_0$, равное $2'15''$. Северный полюс не движется за счет осевого вращения Земли, и перемещение Луны будет происходить с той же угловой скоростью, с какой она движется по орбите (с очень малой параллактической поправкой на приближенное положение наблюдателя, необязательной для учета). В соответствии со II законом Кеплера, тангенциальная скорость тела по ходу движения по орбите пропорциональна $(1/L)$, а угловая скорость – $(1/L)^2$, где L – расстояние до него. Во время затмения в перигее при наблюдении с полюса данная угловая скорость составляет

$$\omega = \frac{2\pi}{T}\left(\frac{L_0}{L}\right)^2 \cdot \frac{L}{L - R\sin\varepsilon}.$$

Здесь L и L_0 – наименьшее и среднее расстояние Луны от Земли, T – орбитальный период Луны. Данная угловая скорость составляет $0.643'$ в минуту. Практически в том же направлении перемещается относительно звезд и Солнце, угловая скорость в случае малого эксцентриситета орбиты Земли e равна

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}(1 - e)^2.$$

Здесь T_0 – орбитальный период Земли. Угловая скорость составляет $0.040'$ в минуту. Максимальная продолжительность полного солнечного затмения на северном полюсе Земли составит

$$t = \frac{d - d_0}{\omega - \omega_0} = 3^{\text{М}}44^{\text{С}}.$$

Полное солнечное затмение длительностью в $3^{\text{м}}13^{\text{с}}$ произошло в непосредственной близости от северного полюса ровно 200 лет назад, 6 июля 1815 года.

X. 3 ДАЛЕКИЙ РАДИОИСТОЧНИК

О.С. Угольников

? Короткий одиночный импульс от далекого радиоисточника был принят 21 марта в 06ч00м00.0000с по всемирному времени радиотелескопами вблизи Мурманска (69° с.ш., 30° в.д.), в Индонезии (0° ш., 99° в.д.) и Антарктиде (69° ю.ш., 30° в.д.). Определите экваториальные координаты источника на небе. Уравнением времени и сжатием Земли пренебречь.

! Коль скоро импульс от радиоисточника был принят в данных трех пунктах одновременно со столь высокой точностью, можно сделать вывод, что расстояние от источника до всех трех пунктов одинаково. Иными словами, плоскость, содержащая три пункта, перпендикулярна направлению на источник. А это означает, что высота источника над горизонтом в этих пунктах также одинакова, а сами пункты равноудалены от той точки поверхности Земли, где источник находился в зените.

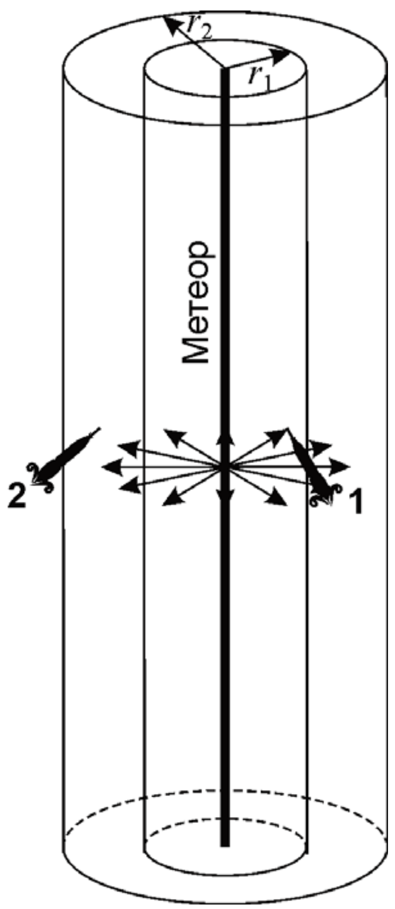
По координатам можно увидеть, что все три пункта удалены на 69° по поверхности Земли от точки (0° ш., 30° в.д.). Очевидно, что именно при наблюдении из нее указанный источник находился в зените. Есть и другая точка (0° ш., 150° з.д.), также равноудаленная от всех пунктов, но уже на 121°. Источник не мог находиться там в зените, так как в этом случае он не был бы виден из указанных трех наблюдательных пунктов.

Источник находится в зените на экваторе, следовательно, его склонение равно нулю. Чтобы определить его прямое восхождение, учтем, что в день весеннего равноденствия в любом наблюдательном пункте звездное время отличается от местного времени на 12 часов. Всемирное время есть местное время на нулевом меридиане, и в 6 часов утра звездное время там составляет 18 часов. На долготе λ, равной +30° или +2 часам, звездное время составит 20 часов. Источник, находящийся в этот момент в зените (в верхней кульминации), должен иметь такое же прямое восхождение. Итак, координаты источника: $\alpha = 20^{ч}$, $\delta = 0$.

X. 4 ВБЛИЗИ МЕТЕОРА

О.С. Угольников

? Метеор загорелся на высоте 100 км и погас на высоте 60 км, двигаясь строго вертикально и имея постоянную скорость и светимость. Геофизическая ракета, расположенная в 2 км от траектории метеора на высоте 80 км, измерила суммарный поток энергии от метеора за время полета, который оказался равен потоку от звезды –5.0^{m} (за то же время). Какой результат дадут аналогичные измерения с другой геофизической ракеты на той же высоте в 4 км от траектории метеора?



! С первого взгляда может показаться, что вторая геофизическая ракета, расположенная вдвое дальше от метеора, чем первая, должна зафиксировать вчетверо меньшую яркость. Это было бы так, будь метеор точечным объектом. Однако, как сказано в условии, метеор имел длину 40 км, что существенно больше расстояния от обеих ракет до середины его траектории. И если расстояния от ракеты до средней точки метеора будут различаться в 2 раза, то для более далеких частей траектории это отношение будет меньшим.

Считая длину метеора много большей расстояния до аппаратов, изобразим цилиндры, осью которых будет траектория метеора, а поверхности проходят через геофизические ракеты. Высота цилиндров значительно больше их радиусов, и практически вся световая энергия от метеоров будет проходить через боковые поверхности цилиндров. Для второй ракеты их площадь вдвое больше, чем для первого. Поэтому и суммарный энергетический поток от метеора, зафиксированный этой ракетой, будет вдвое, а не вчетверо меньшим, чем для первой ракеты. Общая звездная величина метеора для второй ракеты составит

$$m_2 = m_1 - 2.5\lg\frac{r_2}{r_1} = -4.25.$$

Точный анализ (не требуемый для решения задачи) показывает, что вторая геофизическая ракета зафиксирует яркость метеора, соответствующую звезде -4.18^m, что мало отличается от полученного ответа.

X. 5 СОЛНЦЕ СКВОЗЬ ДУРШЛАГ

А.Н. Акиньщиков

? Как известно, обычный дуршлаг можно использовать для наблюдений Солнца, в частности, во время частных солнечных затмений, проецируя изображения Солнца на светлый экран. Каким должно быть расстояние от дуршлага до экрана, чтобы условия для наблюдений были наилучшими? Какое угловое разрешение при этом может быть достигнуто? Считать, что наблюдатель находится рядом с дуршлагом, на том же расстоянии от экрана. Параметры дуршлага: диаметр – 20 см, диаметр отверстий – 2 мм, расстояние между центрами отверстий – 10 мм.

! При таких наблюдениях каждое отверстие дуршлага играет роль камеры-обскуры, формируя изображение яркого объекта на экране. Максимальное угловое разрешение будет ограничено несколькими факторами. Первое и самое простое ограничение связано с тем, что для наблюдателя, находящегося рядом с дуршлагом, угловой размер изображения будет равен реальному угловому диаметру Солнца. Соответственно, при таком масштабе (1:1) человеческий глаз не сможет превысить разрешения $\rho_E=1'$ независимо от расстояния между дуршлагом и экраном L.

Следующее ограничение связано с явлением дифракции, которое будет происходить на отверстиях дуршлага. Для видимого света (длина волны 550 нм) угловой размер дифракционного кружка от точечного источника составит

$$\rho_D = 1.22\frac{\lambda}{d} \approx 1'.$$

Здесь d – диаметр отверстия. Полученная величина также не зависит от расстояния между дуршлагом и экраном. Получается, что дифракция не накладывает дополнительных ограничений на разрешение, но при этом лишает наблюдателя смысла приближаться к экрану ближе, чем дуршлаг.

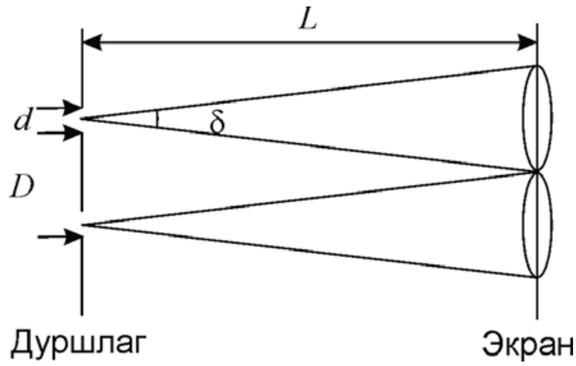
Если наблюдать со стороны экрана, то отверстия дуршлага будут иметь заметные размеры, и в определенную точку экрана будет попадать свет от разных участков Солнца. Можно считать, что разрешение в этом случае ограничено величиной

$$\rho_R = \frac{r}{L} = \frac{d}{2L} \approx \frac{3'}{L(\text{м})}.$$

Здесь r – радиус отверстий. Детали с такими угловыми размерами будут видны с сильным размытием, для большей четкости они должны быть вдвое большими (соответствуя не радиусу, а диаметру отверстий). Это ограничение ослабляется, если увеличить расстояние до экрана. Однако тогда размер изображений Солнца (угловой диаметр δ) на экране будет возрастать, и в какой-то момент эти изображения начнут накладываться друг на друга. Это произойдет, когда размер изображения станет равным расстоянию между отверстиями D. Определим соответствующее расстояние до экрана:

$$L_0 = \frac{D}{\delta} \sim 1\,\text{м}.$$

Можно сделать вывод, что именно такое расстояние будет оптимальным, и предельное разрешение составит $3'$ или чуть хуже. Может показаться, что ситуацию можно улучшить, закрыв часть отверстий дуршлага и еще увеличив расстояние. Но в реальности это приведет к ослаблению яркости изображений Солнца на экране, и они потеряются на фоне постороннего дневного света.



Х. 6 ЮЖНАЯ ЗВЕЗДА

Е.Н. Фадеев

? Прямое восхождение одиночной звезды равно $18^ч$, а ее склонение $-23°26'$. Собственное движение по склонению у этой звезды в настоящий момент отсутствует, а по прямому восхождению оно равно $1''$/год и направлено на запад. Будет ли видно эту звезду на северном полюсе Земли, и если будет, то через сколько лет? Лучевой скоростью звезды, атмосферной рефракцией и ослаблением света пренебречь.

! Как видно по координатам, звезда находится в точке зимнего солнцестояния, которая на северном полюсе Земли наблюдаться не может. Для того, чтобы понять, когда звезда сможет появиться на небе северного полюса, обратим внимание, что ее собственное движение направлено на запад, то есть вдоль большого круга небесной сферы – эклиптики.

На северном полюсе можно наблюдать только северную часть эклиптики. Чтобы появиться над горизонтом, звезда должна оказаться в точке весеннего или осеннего равноденствия. Звезда движется вдоль эклиптики навстречу годичному движению Солнца со скоростью $1''$/год, которую можно считать постоянной (так как у звезды в настоящий момент нет лучевой скорости).

Известно, что в результате прецессии точка весеннего равноденствия также смещается относительно звезд навстречу годичному движению Солнца и обходит всю эклиптику примерно за 26000 лет, что соответствует скорости

$$360\cdot3600'' / 26000 \sim 50''/\text{год}.$$

Таким образом, точка весеннего равноденствия догоняет нашу звезду. Поскольку изначально собственное движение было направлено вдоль эклиптики, а сама плоскость эклиптики не меняет своего положения, звезда все время остается в этой плоскости. Примерно через 6500 лет звезда появится над горизонтом на северном полюсе Земли. Учет собственного движения особо не влияет на ответ, поскольку его вклад меньше, чем погрешность используемой простейшей модели прецессии.