Всероссийская олимпиада школьников 2013-2014 в городе Москве
Типовые задания I (школьного) этапа олимпиады по математике

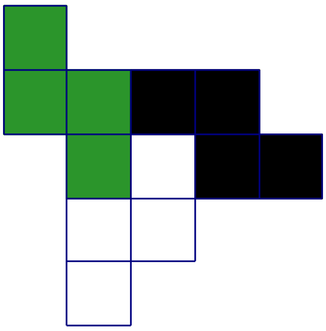
5 класс. Краткие решения.

1. Вася может получить число 100, используя десять двоек, скобки и знаки арифметических действий: $100 = (22:2-2:2)\cdot(22:2-2:2)$. Улучшите его результат: используйте меньшее число двоек и получите число 100. (*Достаточно привести один пример*).

Решение. Например: 1) $100 = 222:2-22:2$, *2)* $100 = (2\cdot2\cdot2+2)\cdot(2\cdot2\cdot2+2)$. *Есть и другие решения.*

2. Разрежьте фигуру на 3 равные части.

Решение. Смотри рисунок.



3. Как отмерить 8 л воды, находясь около реки и имея два ведра вместимостью 10 л и 6 л? *(8 л воды должно получиться в одном ведре).*

Решение. Запишем в виде таблицы последовательность наполнения ведер:

	Ведро вместимостью 10 л	Ведро вместимостью 6 л	Комментарий
Сначала	0 л	0 л	
1 шаг	10 л	0 л	Первое ведро наполнили из реки
2 шаг	4 л	6 л	Перелили из первого ведра во второе до его наполнения
3 шаг	4 л	0 л	Вылили из второго в реку
4 шаг	0 л	4 л	Перелили из первого ведра во второе
5 шаг	10 л	4 л	Первое ведро наполнили из реки
6 шаг	8 л	6 л	Перелили из первого ведра во второе до его наполнения

4. Белоснежка вошла в комнату, где вокруг круглого стола стояло 30 стульев. На некоторых из стульев сидели гномы. Оказалось, что Белоснежка не может сесть так, чтобы рядом с ней никто не сидел. Какое наименьшее число гномов могло быть за столом? (*Объясните, как должны были сидеть гномы и почему, если бы гномов было меньше, был бы стул, рядом с которым никто не сидит).*

Ответ. 10.
Решение. Если за столом в каком-нибудь месте было бы три свободных стула подряд, то Белоснежка смогла бы сесть так, чтобы рядом с ней никто не сидел. Значит, какие бы три подряд идущих стула мы не взяли, по крайней мере, на одном из них должен сидеть гном. Так как всего стульев 30, то меньше, чем 10 гномов быть не может. Покажем, что рассадить 10 гномов так, чтобы выполнялось условие задачи можно: посадим гномов через два стула: на первый стул, на четвертый стул, на седьмой и т.д. Тогда условие задачи будет выполнено.

5. Папа, Маша и Яша идут в школу. Пока папа делает 3 шага, Маша делает 5 шагов. Пока Маша делает 3 шага, Яша делает 5 шагов. Маша и Яша посчитали, что вместе они сделали 400 шагов. Сколько шагов сделал папа?

Ответ. 90 шагов.
Решение. 1 способ. Назовем расстояние, равное 3 шагам Маши и 5 шагам Яши, шагом Великана. Пока Великан делает один шаг, Маша и Яша делают вместе 8 шагов. Так как они сделали вместе 400 шагов, то Великан за это время сделал бы 400:8=50 великанских шагов. Если Великан сделал 50 шагов, то Маша сделала 150 шагов. Посчитаем теперь их «пятерками». 150 - это 30 раз по 5 шагов. Значит, папа сделал 30 раз по 3 шага, то есть 90 шагов.
2 способ. Пока Маша делает $3 \cdot 5 = 15$ *шагов, папа делает* $3 \cdot 3 = 9$ *шагов, а Яша делает* $5 \cdot 5 = 25$ *шагов. Вместе за это время Маша и Яша сделают 15+25=40 шагов. А пока они сделают 400 шагов, папа сделает тоже в 10 раз больше шагов, т.е.* $9 \cdot 10 = 90$ *шагов.*

5 класс. Рекомендации по проверке.
Каждая задача оценивается из 7 баллов. Каждая оценка – целое число от 0 до 7. Ниже приведены некоторые указания к проверке. Естественно, всех случаев составители предвидеть не могут. При оценке решения нужно исходить из того, является ли приведенное решение в целом верным (хотя, может быть, и с недостатками) – тогда решение оценивается не менее чем в 4 балла. Или оно неверное (хотя, может быть, и с существенными продвижениями) – в этом случае оценка должна быть не выше 3 баллов.

Задача 1. Любой верный пример – 7 баллов.
Два или несколько примеров, среди которых есть верные и неверные – 5 баллов.

Задача 2. Верное разрезание – 7 баллов. Обоснования не требуются.
Разрезание на неравные фигуры равной площади – 2 балла.

Задача 3. Правильный алгоритм – 7 баллов.
Разумные продвижения, например, отмерено 4 л – до 3 баллов.

Задача 4. Полное решение – 7 баллов.
Приведен пример рассадки и есть рассуждения, почему меньше гномов быть не может с некоторыми пробелами – 5-6 баллов.
Дан верный пример рассадки, но не объяснено, почему меньше гномов быть не может – 3 балла.
Дан ответ, объяснено, почему меньше гномов быть не может. Но как сидят гномы не объяснено – 3 балла.
Только ответ – 1 балл.

Задача 5. Полное решение – 7 баллов.
Решение на рисунке (по клеточкам и т.п.) без достаточных объяснений – 4-5 баллов.
Верное решение с арифметической ошибкой – 4 балла.
Только ответ – 0 баллов.

Всероссийская олимпиада школьников 2013-2014 в городе Москве
Типовые задания I (школьного) этапа олимпиады по математике

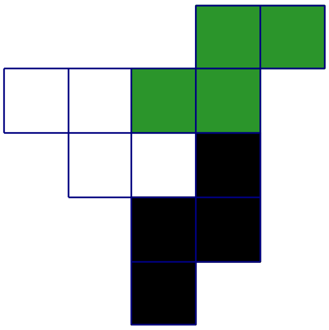
6 класс. Краткие решения.

1. Вася может получить число 100, используя десять троек, скобки и знаки арифметических действий: $100 = (33:3-3:3)\cdot(33:3-3:3)$. Улучшите его результат: используйте меньшее число троек и получите число 100. (*Достаточно привести один пример*).

Решение. Например: 1) $100 = 333:3-33:3$, *2)* $100 = 33\cdot 3 + 3:3$. *Есть и другие решения.*

2. Разрежьте фигуру на 3 равные части.

Решение. Смотри рисунок.



3. Как отмерить 2 л воды, находясь около реки и имея два ведра вместимостью 10 л и 6 л? *(2 л воды должно получиться в одном ведре).*

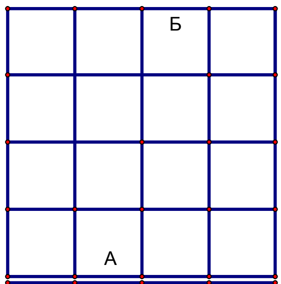
Решение. Запишем в виде таблицы последовательность наполнения ведер:

	Ведро вместимостью 10 л	Ведро вместимостью 6 л	Комментарий
Сначала	0 л	0 л	
1 шаг	10 л	0 л	Первое ведро наполнили из реки
2 шаг	4 л	6 л	Перелили из первого ведра во второе до его наполнения
3 шаг	4 л	0 л	Вылили из второго ведра в реку
4 шаг	0 л	4 л	Перелили из первого ведра во второе
5 шаг	10 л	4 л	Первое ведро наполнили из реки
6 шаг	8 л	6 л	Перелили из первого ведра во второе до его наполнения
7 шаг	8 л	0 л	Вылили из второго ведра в реку
8 шаг	2 л	6 л	Перелили из первого ведра во второе до его наполнения

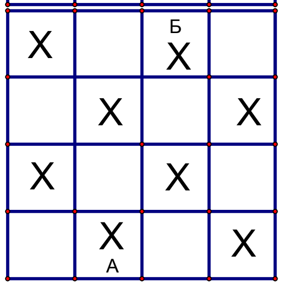
4. Папа, Маша и Яша идут в школу. Пока папа делает 3 шага, Маша делает 5 шагов. Пока Маша делает 3 шага, Яша делает 5 шагов. Маша и Яша посчитали, что вместе они сделали 400 шагов. Сколько шагов сделал папа?

<u>Ответ.</u> 90 шагов.
<u>Решение</u>. 1 способ. Назовем расстояние, равное 3 шагам Маши и 5 шагам Яши, шагом Великана. Пока Великан делает один шаг, Маша и Яша делают вместе 8 шагов. Так как они сделали вместе 400 шагов, то Великан за это время сделал бы 400:8=50 великанских шагов. Если Великан сделал 50 шагов, то Маша сделала 150 шагов. Посчитаем теперь их «пятерками». 150 - это 30 раз по 5 шагов. Значит, папа сделал 30 раз по 3 шага, то есть 90 шагов.
2 способ. Пока Маша делает $3\cdot 5=15$ шагов, папа делает $3\cdot 3=9$ шагов, а Яша делает $5\cdot 5=25$ шагов. Вместе за это время Маша и Яша сделают 15+25=40 шагов. А пока они сделают 400 шагов, папа сделает тоже в 10 раз больше шагов, т.е. $9\cdot 10=90$ шагов.

В музее 16 залов, расположенных, как показано на рисунке. В половине из них выставлены картины, а в половине – скульптуры. Из любого зала можно попасть в любой соседний с ним (имеющий общую стену). При любом осмотре музея залы чередуются: зал с картинами – зал со скульптурами – зал с картинами и т.д. Осмотр начинается в зале А, в котором висят картины, а заканчивается в зале Б.

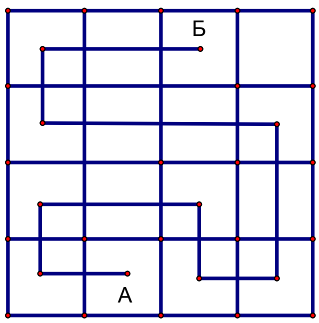


а) Обозначьте крестиками все залы, в которых висят картины.
<u>Решение.</u> Смотри рисунок.



б) Турист хочет осмотреть как можно больше залов (пройти от зала А к залу Б), но при этом в каждом зале побывать не больше одного раза. Какое наибольшее количество залов он сможет посмотреть? Нарисуйте какой-нибудь его маршрут наибольшей длины и **докажите**, что большее количество залов он посмотреть не мог.

<u>Ответ.</u> 15.
<u>Решение</u>. Один из возможных маршрутов показан на рисунке. Докажем, что если турист хочет побывать в каждом зале не больше одного раза, он не сможет посмотреть больше, чем 15 залов. Заметим, что маршрут начинается в зале с картинами (А) и заканчивается в зале с картинами (Б). Значит, число залов с картинами, которые прошел турист на один больше числа залов со скульптурами. Так как залов с картинами, которые мог пройти турист не больше 8, то залов со скульптурами – не больше 7. Итак, маршрут не может проходить больше чем через 15 залов.



6 класс. Рекомендации по проверке.
Каждая задача оценивается из 7 баллов. Каждая оценка – целое число от 0 до 7. Ниже приведены некоторые указания к проверке. Естественно, всех случаев составители предвидеть не могут. При оценке решения нужно исходить из того, является ли приведенное решение в целом верным (хотя, может быть, и с недостатками) – тогда решение оценивается не менее чем в 4 балла. Или оно неверное (хотя, может быть, и с существенными продвижениями) – в этом случае оценка должна быть не выше 3 баллов.

Задача 1. Любой верный пример – 7 баллов.
Два или несколько примеров, среди которых есть верные и неверные – 5 баллов.

Задача 2. Верное разрезание – 7 баллов. Обоснования не требуются.
Разрезание на неравные фигуры равной площади – 2 балла.

Задача 3. Правильный алгоритм – 7 баллов.
Разумные продвижения, например, отмерено 8 л – до 3 баллов.

Задача 4. Полное решение – 7 баллов.
Решение на рисунке (по клеточкам и т.п.) без достаточных объяснений – 4-5 баллов.
Верное решение с арифметической ошибкой – 4 балла.
Только ответ – 0 баллов.

Задача 5. а) Верное решение – 1 балл.
б) Приведен пример верного маршрута (конечно, не обязательно такого, как в решении выше) и доказано, что маршрут не может быть длиннее – 6 баллов.
Приведен пример верного маршрута, но не доказано, что маршрут не может быть длиннее – 2 баллов.

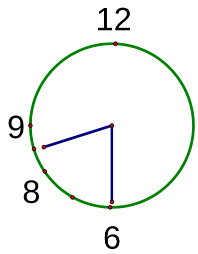
Всероссийская олимпиада школьников 2013-2014 в городе Москве
Типовые задания I (школьного) этапа олимпиады по математике

7 класс. Краткие решения.

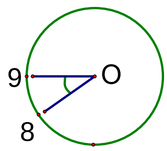
1. Вася может получить число 100, используя десять семерок, скобки и знаки арифметических действий: $100=(77:7-7:7)\cdot(77:7-7:7)$. Улучшите его результат: используйте меньшее число семерок и получите число 100. (*Достаточно привести один пример*).

Решение. Например: 1) $100=777:7-77:7$*, 2)* $100=7\cdot7+7\cdot7+7:7+7:7$. *Есть и другие решения.*

2. На часах половина девятого. Чему равен угол между часовой и минутной стрелками?



Ответ. 75^0.
Решение. В момент, когда часы показывают половину девятого, минутная стрелка указывает на цифру 6, а часовая на середину дуги между цифрами 8 и 9 (см. рисунок). Если из центра часов провести два луча к соседним цифрам циферблата, то между ними будет угол $360^0:12=30^0$*. Угол между стрелками часов, когда они показывают половину девятого, в два с половиной раза больше. Следовательно, он равен* 75^0.



3. Назовем число зеркальным, если слева направо оно «читается» так же, как справа налево. Например, число 12321 – зеркальное.
а) Напишите какое-нибудь зеркальное пятизначное число, которое делится на 5.
б) Сколько существует пятизначных зеркальных чисел, которые делятся на 5?

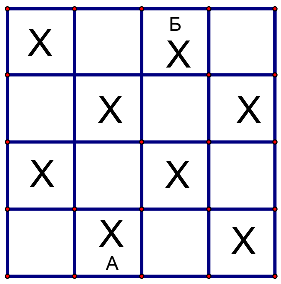
а) Решение. Любое зеркальное число, оканчивающееся на 5. Например, 51715.
б) Ответ. 100.
Решение. Число, которое делится на 5, должно оканчиваться на 5 или на 0. Зеркальное число оканчиваться на 0 не может, так как тогда оно должно на 0 начинаться. Итак, первая и последняя цифры - это 5. Вторая и третья цифра могут быть любыми – от сочетания 00 до сочетания 99 – всего 100 вариантов. Так как четвертая цифра повторяет вторую, всего различных чисел будет 100.

4. Саша, Лёша и Коля одновременно стартовали в забеге на 100 м. Когда Саша финишировал, Лёша находился в десяти метрах позади него, а когда финишировал Лёша — Коля находился позади него в десяти метрах. На каком расстоянии друг от друга находились Саша и Коля, когда Саша финишировал? (Предполагается, что все мальчики бегут с постоянными, но, конечно, не равными скоростями.)

Ответ. 19 м.
Решение. Скорость Коли составляет 0,9 от скорости Лёши. В момент, когда Саша финишировал, Лёша пробежал 90 м, а Коля $0{,}9\cdot90=81$*м. Следовательно, расстояние между Сашей и Колей было 19 м.*

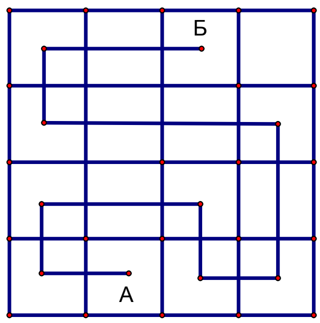
5. В музее 16 залов, расположенных, как показано на рисунке. В половине из них выставлены картины, а в половине – скульптуры. Из любого зала можно попасть в любой соседний с ним (имеющий общую стену). При любом осмотре музея залы чередуются: зал с картинами – зал со скульптурами – зал с картинами и т.д. Осмотр начинается в зале А, в котором висят картины, а заканчивается в зале Б.

а) Обозначьте крестиками все залы, в которых висят картины.
Решение. Смотри рисунок.



б) Турист хочет осмотреть как можно больше залов (пройти от зала А к залу Б), но при этом в каждом зале побывать не больше одного раза. Какое наибольшее количество залов он сможет посмотреть? Нарисуйте какой-нибудь его маршрут наибольшей длины и **докажите**, что большее количество залов он посмотреть не мог.

Ответ. 15.
Решение. Один из возможных маршрутов показан на рисунке. Докажем, что если турист хочет побывать в каждом зале не больше одного раза, он не сможет посмотреть больше, чем 15 залов. Заметим, что маршрут начинается в зале с картинами (А) и заканчивается в зале с картинами (Б). Значит, число залов с картинами, которые прошел турист на один больше числа залов со скульптурами. Так как залов с картинами, которые мог пройти турист не больше 8, то залов со скульптурами – не больше 7. Итак, маршрут не может проходить больше чем через 15 залов.



7 **класс. Рекомендации по проверке.**
Каждая задача оценивается из 7 баллов. Каждая оценка – целое число от 0 до 7. Ниже приведены некоторые указания к проверке. Естественно, всех случаев составители предвидеть не могут. При оценке решения нужно исходить из того, является ли приведенное решение в целом верным (хотя, может быть, и с недостатками) – тогда решение оценивается не менее чем в 4 балла. Или оно неверное (хотя, может быть, и с существенными продвижениями) – в этом случае оценка должна быть не выше 3 баллов.

Задача 1. Любой верный пример – 7 баллов.
Два или несколько примеров, среди которых есть верные и неверные – 5 баллов.

Задача 2. Верное решение – 7 баллов.
Верный ответ с недостаточно полными обоснованиями – 5 баллов.
Неверный из-за арифметической ошибки ответ, кратный 15^0, *при верном в целом решении – 3 балла.*
Только ответ – 1 балл.

Задача 3. а) Любой верный пример числа – 2 балла.
б) Верное обоснованное решение – 5 баллов.
Частично верные рассуждения при неверном ответе – до 1-2 балла.
Только верный ответ – 0 баллов.

Задача 4. Полное решение – 7 баллов.
Найдено сколько пробежал Коля, но не найдено расстояние между Сашей и Колей – 5 баллов.
Есть существенное продвижение, например, найдены отношения скоростей бегунов – 2-3 балла.
Только ответ – 0 баллов.

Задача 5. а) Верное решение – 1 балл.
б) Приведен пример верного маршрута (конечно, не обязательно такого, как в решении выше) и доказано, что маршрут не может быть длиннее – 6 баллов.
Приведен пример верного маршрута, но не доказано, что маршрут не может быть длиннее – 2 баллов.

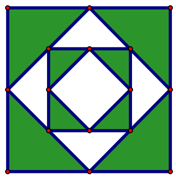
Всероссийская олимпиада школьников 2013-2014 в городе Москве
Типовые задания I (школьного) этапа олимпиады по математике

8 класс. Краткие решения.

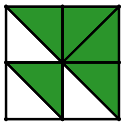
1. Замените в выражении $(x^3-2)^2+(x^2+*)^2$ звездочку (*) на одночлен так, чтобы после возведения в квадрат и приведения подобных слагаемых получилось четыре слагаемых.

Решение. Заменим звездочку (*) на 2x: $(x^3-2)^2+(x^2+2x)^2=$
$x^6-4x^3+4+x^4+4x^3+4x^2=x^6+x^4+4x^2+4$

2. Каково отношение площади закрашенной части к белой? (Вершины всех квадратов за исключением самого большого находятся в серединах соответствующих сторон).



Ответ. 5:3.
Решение.
Рассмотрим «четвертинку» данного рисунка (на рисунке взята верхняя правая «четвертинка»). Разобьем закрашенную область на равные треугольники как показано на рисунке. Закрашенная область состоит из пяти равных треугольников, а белая область – из трех таких же равных треугольников. Отношение площадей: 5:3.



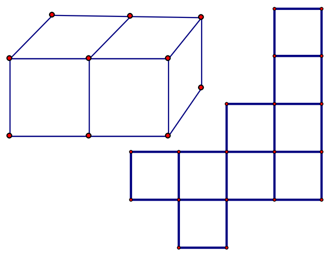
3. Назовем число зеркальным, если слева направо оно «читается» так же, как справа налево. Например, число 12321 – зеркальное.
а) Напишите какое-нибудь зеркальное пятизначное число, которое делится на 5.
б) Сколько существует пятизначных зеркальных чисел, которые делятся на 5?

а) Решение. Любое зеркальное число, оканчивающееся на 5. Например, 51715.
б) Ответ. 100.
Решение. Число, которое делится на 5, должно оканчиваться на 5 или на 0. Зеркальное число оканчиваться на 0 не может, так как тогда оно должно на 0 начинаться. Итак, первая и последняя цифры - это 5. Вторая и третья цифра могут быть любыми – от сочетания 00 до сочетания 99 – всего 100 вариантов. Так как четвертая цифра повторяет вторую, всего различных чисел будет 100.

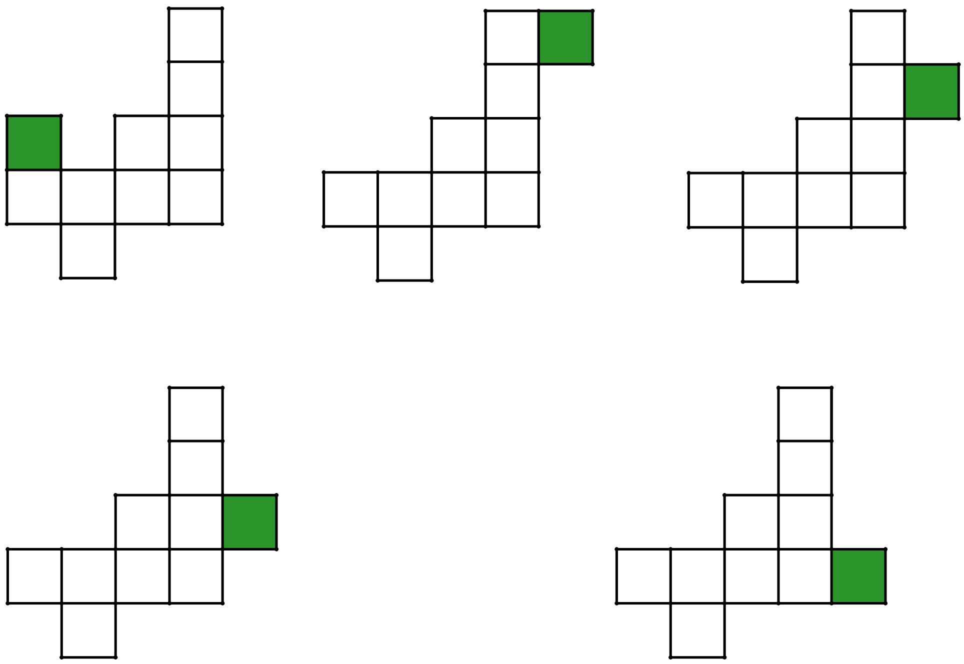
4. Саша, Лёша и Коля одновременно стартуют в забеге на 100 м. Когда Саша финишировал, Лёша находился в десяти метрах позади него, а когда финишировал Лёша — Коля находился позади него в десяти метрах. На каком расстоянии друг от друга находились Саша и Коля, когда Саша финишировал? (Предполагается, что все мальчики бегут с постоянными, но, конечно, не равными скоростями.)

Ответ. 19 м.
Решение. Скорость Коли составляет 0,9 от скорости Лёши. В момент, когда Саша финишировал, Лёша пробежал 90 м, а Коля $0{,}9\cdot 90=81$*м. Следовательно, расстояние между Сашей и Колей было 19 м.*

5. Петя разрезал бумажный параллелепипед 2х1 по его ребрам и получил развертку. Потом Дима отрезал один квадратик от этой развертки, и осталось девять квадратиков, как на рисунке. Где мог быть отрезанный квадратик? Нарисуйте полную развертку и отметьте на ней отрезанный квадратик. *(Достаточно привести один правильный вариант развертки)*.



<u>Решение</u>. Есть 5 вариантов места, где мог быть отрезанный квадратик:



6. Каждый из 10 гномов либо всегда говорит правду, либо всегда лжет. Известно, что каждый из них любит ровно один сорт мороженого: сливочное, шоколадное или фруктовое. Сначала Белоснежка попросила поднять руки тех, кто любит сливочное мороженое, и все подняли руки, потом тех, кто любит шоколадное мороженое – и половина гномов подняли руки, потом тех, кто любит фруктовое мороженое – и руку поднял только один гном. Сколько среди гномов правдивых?

<u>Ответ</u>. 4.

<u>Решение</u>. Гномы, которые всегда говорят правду, подняли руку один раз, а гномы, которые всегда лгут, – два раза. Всего было поднято 16 рук (10+5+1). Если бы все гномы сказали правду, то было бы поднято 10 рук. Если одного правдивого гнома заменить на одного лгуна, то число поднятых рук увеличится на 1. Так как было поднято 6 «лишних» рук, то 6 гномов солгали, а 4 сказали правду.

8 класс. Рекомендации по проверке.
Каждая задача оценивается из 7 баллов. Каждая оценка – целое число от 0 до 7. Ниже приведены некоторые указания к проверке. Естественно, всех случаев составители предвидеть не могут. При оценке решения нужно исходить из того, является ли приведенное решение в целом верным (хотя, может быть, и с недостатками) – тогда решение оценивается не менее чем в 4 балла. Или оно неверное (хотя, может быть, и с существенными продвижениями) – в этом случае оценка должна быть не выше 3 баллов.

Задача 1. Верное решение – 7 баллов.
Верно найден одночлен, верное решение с одной ошибкой (опиской) при возведении в квадрат – 4 балла.
Найден одночлен, но не объяснено, почему он является решением – 2 балла.

Задача 2. Верное решение – 7 баллов.
Частично найдены площади входящих фигур – 2 балла.
Только ответ – 0 баллов.

Задача 3. а) Любой верный пример числа – 2 балла.
б) Верное обоснованное решение – 5 баллов.
Частично верные рассуждения при неверном ответе – до 1-2 балла.
Только верный ответ – 0 баллов.

Задача 4. Полное решение – 7 баллов.
Найдено сколько пробежал Коля, но не найдено расстояние между Сашей и Колей – 5 баллов.
Есть существенное продвижение, например, найдены отношения скоростей бегунов – 2-3 балла.
Только ответ – 0 баллов.

Задача 5. Один верный пример развертки – 7 баллов. Обоснование не требуется.

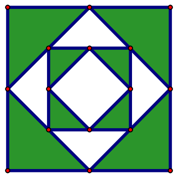
Задача 6. Полное решение – 7 баллов.
Верный ответ, полученный на конкретном примере – 2 балла.

Всероссийская олимпиада школьников 2013-2014 в городе Москве
Типовые задания I (школьного) этапа олимпиады по математике

9 класс. Краткие решения.

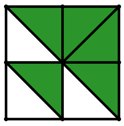
1. Замените в выражении $(x^4-3)^2+(x^3+*)^2$ звездочку (*) на одночлен так, чтобы после возведения в квадрат и приведения подобных слагаемых получилось четыре слагаемых.

<u>Решение</u>. Заменим звездочку (*) на 3x: $(x^4-3)^2+(x^3+3x)^2=$
$x^8-6x^4+9+x^6+6x^4+9x^2=x^8+x^6+9x^2+9$



2. Каково отношение площади закрашенной части к белой? (Вершины всех квадратов за исключением самого большого находятся в серединах соответствующих сторон).

<u>Ответ</u>. 5:3.
<u>Решение</u>.



Рассмотрим «четвертинку» данного рисунка (на рисунке взята верхняя правая «четвертинка»). Разобьем закрашенную область на равные треугольники как показано на рисунке. Закрашенная область состоит из пяти равных треугольников, а белая область – из трех таких же равных треугольников. Отношение площадей: 5:3.

3. Назовем число зеркальным, если слева направо оно «читается» так же, как справа налево. Например, число 12321 – зеркальное. Сколько существует пятизначных зеркальных чисел, которые делятся на 5?

<u>Ответ</u>. 100.
<u>Решение</u>. Число, которое делится на 5, должно оканчиваться на 5 или на 0. Зеркальное число оканчиваться на 0 не может, так как тогда оно должно на 0 начинаться. Итак, первая и последняя цифры - это 5. Вторая и третья цифра могут быть любыми – от сочетания 00 до сочетания 99 – всего 100 вариантов. Так как четвертая цифра повторяет вторую, всего различных чисел будет 100.

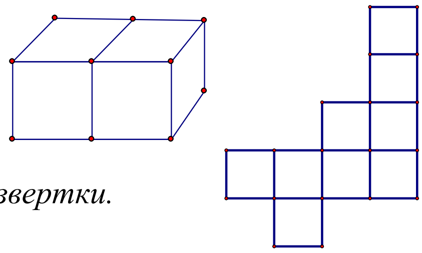
4. Вася задумал два числа. Их сумма равна их произведению и равна их частному. Какие числа задумал Вася?

<u>Ответ</u>. $\frac{1}{2}, -1.$

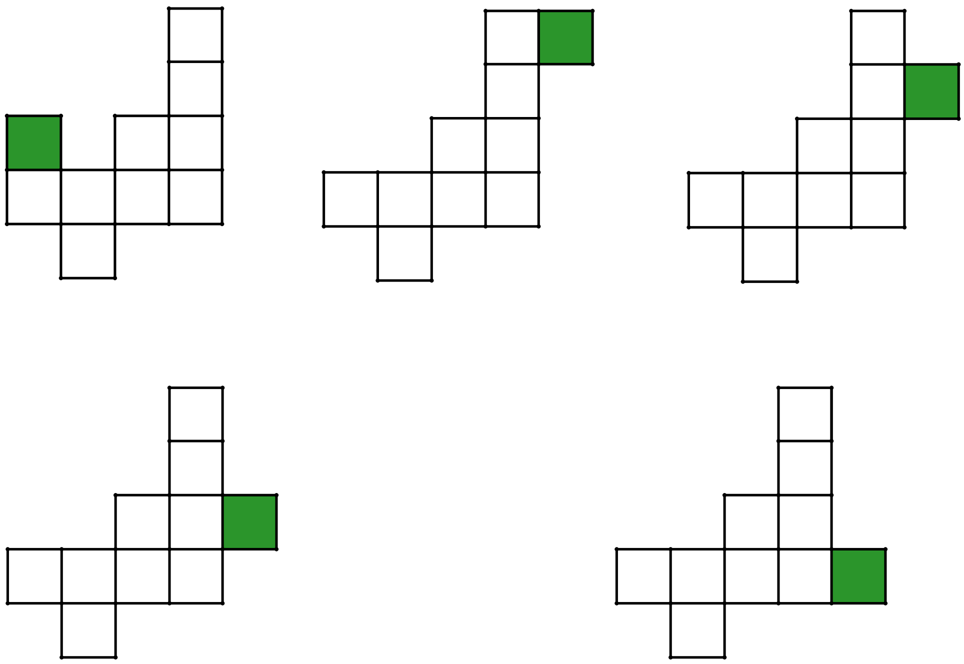
<u>Решение</u>. Обозначим числа x и y. Тогда по условию задачи: $x+y=xy=\frac{x}{y}$.

Из уравнения $xy=\frac{x}{y}$ *следует, что либо* $x=0$ *и* $y\neq 0$, *либо* $y^2=1$, *а* x *– любой. При* $x=0$ *из уравнения* $x+y=xy$ *следует, что* $y=0$, *противоречие. Из уравнения* $y^2=1$ *получаем, что либо* $y=1$, *либо* $y=-1$. *При* $y=1$ *решений у уравнения* $x+y=xy$ *нет, а при* $y=-1$ *из уравнения* $x+y=xy$ *получаем* $x=\frac{1}{2}$.

5. Петя разрезал бумажный параллелепипед 2х1 по его ребрам и получил развертку. Потом Дима отрезал один квадратик от этой развертки, и осталось девять квадратиков, как на рисунке. Где мог быть отрезанный квадратик? Нарисуйте полную развертку и отметьте на ней отрезанный квадратик. *Достаточно привести один правильный вариант развертки.*



Решение. Есть 5 вариантов места, где мог быть отрезанный квадратик:



6. Каждый из 10 гномов либо всегда говорит правду, либо всегда лжет. Известно, что каждый из них любит ровно один сорт мороженого: сливочное, шоколадное или фруктовое. Сначала Белоснежка попросила поднять руки тех, кто любит сливочное мороженое, и все подняли руки, потом тех, кто любит шоколадное мороженое – и половина гномов подняли руки, потом тех, кто любит фруктовое мороженое – и руку поднял только один гном. Сколько среди гномов правдивых?

Ответ. 4.
Решение. Гномы, которые всегда говорят правду, подняли руку один раз, а гномы, которые всегда лгут, – два раза. Всего было поднято 16 рук (10+5+1). Если бы все гномы сказали правду, то было бы поднято 10 рук. Если одного правдивого гнома заменить на одного лгуна, то число поднятых рук увеличится на 1. Так как было поднято 6 «лишних» рук, то 6 гномов солгали, а 4 сказали правду.

9 класс. Рекомендации по проверке.

Каждая задача оценивается из 7 баллов. Каждая оценка – целое число от 0 до 7. Ниже приведены некоторые указания к проверке. Естественно, всех случаев составители предвидеть не могут. При оценке решения нужно исходить из того, является ли приведенное решение в целом верным (хотя, может быть, и с недостатками) – тогда решение оценивается не менее чем в 4 балла. Или оно неверное (хотя, может быть, и с существенными продвижениями) – в этом случае оценка должна быть не выше 3 баллов.

Задача 1. Верное решение – 7 баллов.
Верно найден одночлен, верное решение с одной ошибкой (опиской) при возведении в квадрат – 4 балла.
Найден одночлен, но не объяснено, почему он является решением – 2 балла.

Задача 2. Верное решение – 7 баллов.
Частично найдены площади входящих фигур – 2 балла.
Только ответ – 0 баллов.

Задача 3. Верное обоснованное решение – 7 баллов.
Частично верные рассуждения при неверном ответе – до 2-3 балла.
Только верный ответ – 0 баллов.

Задача 4. Полное решение – 7 баллов.
Верный ход решения, верно найдено одно из чисел, арифметическая ошибка в последнем действии – 4 балла.
Ответ с проверкой условия задачи, но без объяснения, почему пара чисел единственна – 3 балла.
Только ответ – 0 баллов.

Задача 5. Один верный пример развертки – 7 баллов. Обоснование не требуется.

Задача 6. Полное решение – 7 баллов.
Верный ответ, полученный на конкретном примере – 2 балла.

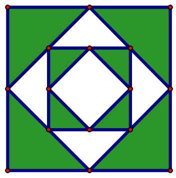
Всероссийская олимпиада школьников 2013-2014 в городе Москве
Типовые задания I (школьного) этапа олимпиады по математике

10-11 класс. Краткие решения.

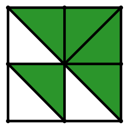
1. Если число 100^{10} записать в виде суммы десяток (10+10+10+…), то сколько получится слагаемых?

Ответ. 10^{19}.
Решение. $100^{10} = 10^{20} = 10 \cdot 10^{19}$. *Значит, всего будет* 10^{19} *слагаемых.*

2. Каково отношение площади закрашенной области к белой? (Вершины всех квадратов за исключением самого большого находятся в серединах соответствующих сторон).



Ответ. 5:3.
Решение.
Рассмотрим «четвертинку» данного рисунка (на рисунке взята верхняя правая «четвертинка»). Разобьем закрашенную область на равные треугольники как показано на рисунке. Закрашенная область состоит из пяти равных треугольников, а белая область – из трех таких же равных треугольников. Отношение площадей: 5:3.



3. Вася задумал два числа. Их сумма равна их произведению и равна их частному. Какие числа задумал Вася?

Ответ. $\frac{1}{2}, -1.$

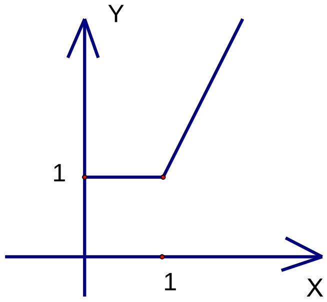
Решение. Обозначим числа x и y. Тогда по условию задачи: $x + y = xy = \frac{x}{y}$.

Из уравнения $xy = \frac{x}{y}$ *следует, что либо* $x = 0$ *и* $y \neq 0$, *либо* $y^2 = 1$, *а* x *– любой. При* $x = 0$ *из уравнения* $x + y = xy$ *следует, что* $y = 0$, *противоречие. Из уравнения* $y^2 = 1$ *получаем, что либо* $y = 1$, *либо* $y = -1$. *При* $y = 1$ *решений у уравнения* $x + y = xy$ *нет, а при* $y = -1$ *из уравнения* $x + y = xy$ *получаем* $x = \frac{1}{2}$.

4. Каждый из 10 гномов либо всегда говорит правду, либо всегда лжет. Известно, что каждый из них любит ровно один сорт мороженого: сливочное, шоколадное или фруктовое. Сначала Белоснежка попросила поднять руки тех, кто любит сливочное мороженое, и все подняли руки, потом тех, кто любит шоколадное мороженое – и половина гномов подняли руки, потом тех, кто любит фруктовое мороженое – и руку поднял только один гном. Сколько среди гномов правдивых?

Ответ. 4.
Решение. Гномы, которые всегда говорят правду, подняли руку один раз, а гномы, которые всегда лгут, – два раза. Всего было поднято 16 рук (10+5+1). Если бы все гномы сказали правду, то было бы поднято 10 рук. Если одного правдивого гнома заменить на одного лгуна, то число поднятых рук увеличится на 1. Так как было поднято 6 «лишних» рук, то 6 гномов солгали, а 4 сказали правду.

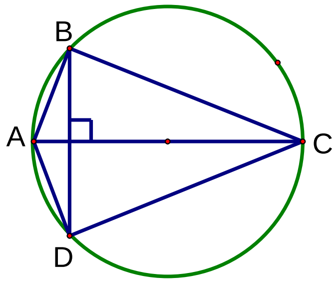
5. Постройте график функции $y=(\sqrt{x})^2+\sqrt{(x-1)^2}$.



<u>Решение</u>. Функция $y=(\sqrt{x})^2+\sqrt{(x-1)^2}$ *определена при* $x\geq 0$. *Преобразуем ее к виду* $y=x+|x-1|$. *При* $x\geq 1$ $y=2x-1$, *при* $0\leq x<1$ $y=1$. *График показан на рисунке:*

6. В четырехугольнике диагонали перпендикулярны. В него можно вписать окружность и около него можно описать окружность. Можно ли утверждать, что это квадрат?

<u>Ответ</u>. Нельзя.



<u>Решение</u>. Рассмотрим в окружности диаметр AC и перпендикулярную ему хорду BD, не проходящую через центр (см. рисунок). Покажем, что четырехугольник ABCD удовлетворяет условию задачи. Для этого достаточно доказать, что в него можно вписать окружность. В окружности диаметр делит перпендикулярную ему хорду пополам, значит, в треугольнике BAD высота является медианой и этот треугольник является равнобедренным: AB=AD. Аналогично, CB=CD. Так как суммы противоположных сторон четырехугольника ABCD равны, в него можно вписать окружность.

10-11 класс. Рекомендации по проверке.

Каждая задача оценивается из 7 баллов. Каждая оценка – целое число от 0 до 7. Ниже приведены некоторые указания к проверке. Естественно, всех случаев составители предвидеть не могут. При оценке решения нужно исходить из того, является ли приведенное решение в целом верным (хотя, может быть, и с недостатками) – тогда решение оценивается не менее чем в 4 балла. Или оно неверное (хотя, может быть, и с существенными продвижениями) – в этом случае оценка должна быть не выше 3 баллов.

Задача 1. Верное решение – 7 баллов.
Только ответ – 2 балла.

Задача 2. Верное решение – 7 баллов.
Частично найдены площади входящих фигур – 2 балла.
Только ответ – 0 баллов.

Задача 3. Полное решение – 7 баллов.
Верный ход решения, верно найдено одно из чисел, арифметическая ошибка в последнем действии – 4 балла.
Ответ с проверкой условия задачи, но без объяснения, почему пара чисел единственна – 2 балла.
Только ответ – 0 баллов.

Задача 4. Полное решение – 7 баллов.
Верный ответ, полученный на конкретном примере – 2 балла.

Задача 5. Верное решение – 7 баллов.
Верно «сняты» знаки радикалов, но график частично не верен – 2-3 балла.
В целом верный график, полученный «по точкам», без обоснования, почему график состоит из объединения отрезка и луча – 2 балла.

Задача 6. Полное решение – 7 баллов.
Верный пример фигуры, но не доказано одно из свойств (вписанность, описанность или перпендикулярность диагоналей) – 3 балла.
Верная «картинка» – 1 балл.