V МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ИМЕНИ ЛЕОНАРДА ЭЙЛЕРА

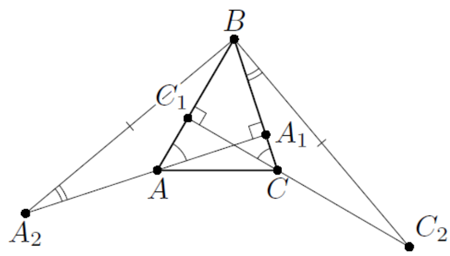
Решения заданий регионального этапа, критерии оценки

5. *У Синдбада в кошельке 11 внешне одинаковых динаров, среди которых, возможно, один фальшивый, отличающийся от настоящего по весу, но неизвестно в какую сторону. Как ему расплатиться с торговцем восемью настоящими динарами, если торговец разрешил два раза воспользоваться его чашечными весами, но без гирь?* (Л. Емельянов)

Решение. Выделим три кучки I, II, III по три монеты в каждой. Сравним кучки I и II, а затем — кучки II и III. Если все три кучки равны по весу, то все монеты в них настоящие, и мы нашли даже 9 монет. В противном случае одна из кучек отличается по весу от других, и нам известно — какая (если в одном из взвешиваний две кучки равны, то фальшивая в третьей; иначе II отличается по весу как от I, так и от III, и фальшивая может быть только в II). Тогда искомые восемь монет — это остальные две кучки и две неиспользованные монеты. **Замечание.** Приведённый способ — не единственный возможный.

Критерии. Если приведён верный алгоритм — *оценка не ниже 5 баллов*. За отсутствие обоснования алгоритма оценка снижается только там, где ситуация действительно не очевидна.

6. *Дан остроугольный треугольник ABC. Высота AA_1 продолжена за вершину A на отрезок $AA_2 = BC$. Высота CC_1 продолжена за вершину C на отрезок $CC_2 = AB$. Найдите углы треугольника A_2BC_2.* (Р. Женодаров)



Ответ. $\angle A_2BC_2 = \angle 90°$, $\angle BA_2C_2 = \angle BC_2A_2 = 45°$.

Решение. Треугольники ABA_2 и CC_2B равны по двум сторонам и углу между ними ($AB = CC_2$, $AA_2 = BC$, а углы BAA_2 и BCC_2 равны как смежные с углами A_1AB и C_1CB, равными $90°–\angle ABC$). Поэтому $\angle BA_2A = \angle CBC_2$, откуда $\angle A_2BC_2 = \angle A_2BA+\angle ABC+\angle CBC_2 = \angle ABC+(\angle A_2BA+\angle BA_2A) = \angle ABC+\angle BAA_1 = 90°$. Кроме того, $A_2B = C_2B$, откуда $\angle BA_2C_2 = \angle BC_2A_2 = (180°–\angle A_2BC_2)/2 = 45°$.

Замечание. Утверждение задачи остаётся верным и для не остроугольного треугольника *ABC*.

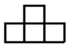
Критерии. Только ответ — *0 баллов*. Замечено равенство треугольников ABA_2 и CC_2B, дальнейшего содержательного продвижения нет — *2 балла*.

7. *Пусть a, b, c — три натуральных числа. На доску выписали три произведения ab, ac, bc, и у каждого из них стёрли все цифры, кроме двух последних. Могло ли случиться, что в результате получились три последовательных двузначных числа?* (Н. Агаханов)

Ответ. Не могло. **Решение**. Предположим противное: произведения *ab*, *bc* и *ca* оканчиваются, соответственно, двузначными числами *n*, *n*+1 и *n*+2. Среди этих трёх последовательных чисел обязательно найдется нечётное, значит, произведение каких-то двух из чисел *a*, *b* и *c* нечётно. Это означает, что по крайней мере два из чисел *a*, *b* и *c* нечётны. Но тогда третье число чётно, иначе все три произведения *ab*, *bc*, *ca* были бы нечётными, что невозможно.

Итак, среди произведений одно нечётное и два чётных числа, то есть число *n* чётно. Тогда число *a* чётно, а числа *b* и *c* нечётны. Теперь, если *a* делится на 4, то оба числа *n* и *n*+2 должны делиться на 4. Если же *a* не делится на 4, то числа *n* и *n*+2 также не делятся на 4. Однако из двух последовательных чисел *n* и *n*+2 одно обязательно делится на 4, а другое — нет. Противоречие.

Критерии. Ответ без обоснования — *0 баллов*. Показано, что число n чётно, дальнейшего содержательного продвижения нет — *2 балла*.

8. *В клетках доски 8×8 расставлены числа 1 и –1 (в каждой клетке — по одному числу). Рассмотрим всевозможные расположения четырёхклеточной фигурки*  *на доске (фигурку можно поворачивать, но её клетки не должны выходить за пределы доски). Назовём такое расположение* ***неудачным****, если сумма чисел, стоящих в четырёх клетках фигурки, не равна 0. Найдите наименьшее возможное число неудачных расположений.* (М. Антипов)

Ответ. 36. **Решение**. Покажем, что в каждом «кресте» из пяти клеток доски найдётся хотя бы одно неудачное расположение. Предположим противное; пусть в крайних клетках креста стоят числа a, b, c, d, а в центральной — e; обозначим через S сумму всех этих пяти чисел. Тогда по нашему предположению $S–a = S–b = S–c = S–d = 0$, откуда $a = b = c = d$. Но в таком случае $e = –(a+b+c) = –3a$, что невозможно. Поскольку каждое расположение фигурки лежит не более, чем в одном кресте, получается, что в 36 крестах (с центрами во всех не крайних клетках) найдётся не менее 36 неудачных расположений. С другой стороны, на рисунке справа показан пример расстановки, при которой количество неудачных расположений равно 36 (в каждой клетке указан знак соответствующего числа). Действительно, в любом кресте неудачное расположение ровно одно, а все расположения, прилегающие длинной стороной к границе доски — удачные.

−	+	−	+	−	+	−	+
−	+	−	+	−	+	−	+
+	−	+	−	+	−	+	−
+	−	+	−	+	−	+	−
−	+	−	+	−	+	−	+
−	+	−	+	−	+	−	+
+	−	+	−	+	−	+	−
+	−	+	−	+	−	+	−

Критерии. Ответ без обоснования — *0 баллов*. Доказано, что неудачных расположений не менее 36, примера на 36 нет — *4 балла*. Приведён пример, когда неудачных расположений ровно 36, доказательства, что их не может быть меньше 36, нет — *3 балла*. Доказано, что хотя бы одно из четырёх расположений фигурки в «кресте» неудачно, дальнейшего содержательного продвижения нет — 2 балла.