

11 класс

Задача 1. Колебания спицы

Рассмотрим вращение спицы вокруг левого края подставки. Кинетическая энергия системы равна сумме кинетических энергий шариков:

$$K = \frac{m}{2} \left(\frac{L-l}{2} \right)^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{m}{2} \left(\frac{L+l}{2} \right)^2 \dot{\varphi}^2 = \frac{m(L^2+l^2)}{4} \dot{\varphi}^2 \approx \frac{mL^2}{4} \dot{\varphi}^2.$$

Потенциальная энергия системы:

$$\Pi = -mg \left(\frac{L-l}{2} \right) \varphi + mg \left(\frac{L+l}{2} \right) \varphi = mgl\varphi.$$

Механическая энергия системы сохраняется, поэтому:

$$\dot{K} + \dot{\Pi} = \frac{mL^2}{2} \ddot{\varphi} \dot{\varphi} + mgl\dot{\varphi} = 0.$$

Разделив на $\dot{\varphi}$ (решение $\dot{\varphi} = 0$ нас не интересует), получим уравнение равноускоренного движения:

$$\ddot{\varphi} = -\frac{2gl}{L^2}.$$

Время τ , за которое спица вернётся в горизонтальное положение, найдём из условия:

$$\frac{\ddot{\varphi}\tau^2}{2} = -\varphi_0, \quad \text{откуда,} \quad \tau = \sqrt{\frac{\varphi_0}{gl}} L.$$

После того, как спица вернётся в горизонтальное положение, она начнёт движение относительно правого угла подставки, затем снова относительно левого и так далее. Период такого движения:

$$T = 4\tau = 4L\sqrt{\frac{\varphi_0}{gl}}.$$

Задача 2. Трое в поле, не считая конденсатора

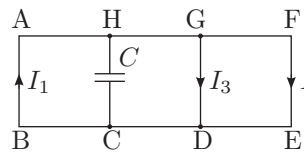


Рис. 23

Через достаточно большое время, конденсатор зарядится так, что ток через него течь не будет, и токи во всей цепи установятся. Предположим, что токи текут так, как показано на рисунке (рис. 23).

Закон Кирхгофа для контуров:

$$AFEB : \mathcal{E}_{AFEB} = 5I_1 r + 3I_2 r, \quad (6)$$

$$AGDB : \mathcal{E}_{AGDB} = 5I_1 r + I_3 r, \quad (7)$$

и первый закон Кирхгофа для точки D:

$$I_1 = I_2 + I_3.$$

Из закона электромагнитной индукции Фарадея:

$$\mathcal{E}_{AFEB} = \frac{d(B \cdot 3a^2)}{dt} = 3ka^2, \quad \mathcal{E}_{AGDB} = 2ka^2. \quad (8)$$

Обозначим $\frac{ka^2}{r} = I_0$. Тогда решая систему уравнений (6), (7), (8), получим:

$$I_1 = \frac{9}{23} I_0, \quad I_2 = \frac{8}{23} I_0, \quad I_3 = \frac{1}{23} I_0.$$

Отсюда и из условия $k > 0$ получаем, что ток I_1 на участке АВ течёт от В к А.

Рассмотрим контур АНСВ.

$$I_0 r = ka^2 = \mathcal{E}_{АНСВ} = I_1 \cdot 3r + U_C,$$

здесь U_C — напряжение между верхней и нижней обкладками конденсатора. Следовательно:

$$U_C = -\frac{4}{23} ka^2, \quad \text{откуда} \quad Q = \frac{4}{23} Cka^2,$$

при этом заряд верхней обкладки отрицательный, нижней — положительный.

Тепловая мощность в цепи равна сумме мощностей на всех проводниках:

$$N = 5I_1^2 r + 3I_2^2 r + I_3^2 r = \frac{26k^2 a^4}{23 r}, \quad \text{откуда} \quad W = N\tau = \frac{26k^2 a^4}{23 r} \tau.$$

Задача 3. Восстановление линзы

Предположим, что стержень с источниками — одна из сторон треугольника (например, АВ), точки A_1 и B_1 — их изображения (рис. 24). Тогда лучи AA_1 и BB_1 пересекаются на середине стороны BB_1 в точке О, которая является центром линзы. Луч, идущий от А через В, преломляется в плоскости линзы и идёт далее через их изображение A_1 и B_1 . Тогда середина АВ точка К принадлежит плоскости линзы. Но в этом случае плоскость линзы ОК пересекает стержень АВ, что невозможно. Следовательно, центр треугольника — один из концов стержня.

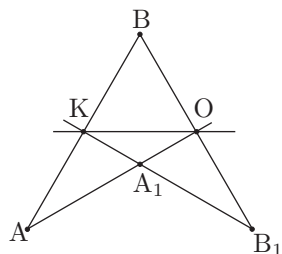


Рис. 24

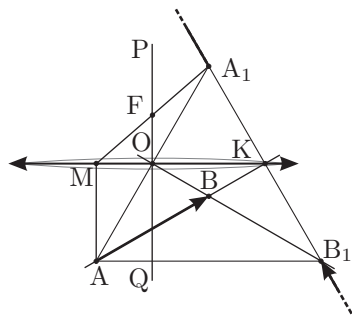


Рис. 25

Рассмотрим этот вариант. Прямые AB и A_1B_1 пересекаются на середине A_1B_1 в точке K , принадлежащей плоскости линзы (рис. 25). Итак, OK — плоскость линзы, точка O — её центр. Прямая PQ , проходящая через точку O перпендикулярно OK — главная оптическая ось. Точки A_1 и B_1 — концы изображения. Само изображение «разорвано» и представляет два луча, лежащие на прямой A_1B_1 , уходящие из точек A_1 и B_1 на бесконечность.

Линза — собирающая, только такая линза может давать «разорванное» изображение.

Определить положение фокусов и фокусное расстояние несложно. Пусть луч AM из точки A параллельно оси линзы PQ до пересечения с плоскостью линзы в точке M . После преломления луч пойдёт через изображение A_1 . Пересечение MA_1 с PQ — точка F и есть главный фокус линзы. Так как OK — средняя линия треугольника, а точка O — середина AA_1 , $OF = \frac{1}{4}h$, где h — высота треугольника, $h = \frac{3}{2}AB = \frac{3}{2}l$. Таким образом, фокусное расстояние $OF = \frac{3}{8}l$.

Задача 4. Давление газировки

При увеличении температуры в объёме V между поверхностью воды и крышкой увеличивается давление газа. Это происходит из-за уменьшения растворимости углекислого газа и его выхода из жидкости. В предельном случае при максимальной температуре t_2 внутри бутылки должно оказаться максимально допустимое давление p_2 .

Найдём массу углекислого газа, которая дополнительно окажется в объёме V при повышении температуры с t_1 до t_2 . Для этого определим растворимости углекислого газа при этих температурах, воспользовавшись графиком и законом Генри:

$$\sigma_1 = \sigma'_1 \frac{p_1}{p_0} \approx 4,50 \text{ г/кг}, \quad \sigma_2 = \sigma'_2 \frac{p_2}{p_0} \approx 4,07 \text{ г/кг},$$

где $\sigma'_1 = 3 \text{ г/кг}$ и $\sigma'_2 = 1,1 \text{ г/кг}$ — растворимости при температурах t_1 и t_2 при атмосферном давлении, найденные из графика. Таким образом, из-за роста температуры в объёме V масса углекислого газа увеличилась на $\Delta m = (\sigma_1 - \sigma_2)m_b = 0,86 \text{ г}$.

Если учесть ещё массу m_1 углекислого газа, который находился над поверхностью вода при герметизации бутылки, то выражение для общей массы углекислого газа будет таким:

$$m_2 = m_1 + \Delta m = \frac{p_1 V \mu}{RT_1} + \Delta m.$$

Давление этого газа в критическом случае равно p_2 :

$$p_2 V = \frac{m_2}{\mu} RT_2 = p_1 V \frac{T_2}{T_1} + \frac{\Delta m}{\mu} RT_2.$$

Таким образом, минимальный надводный объём бутылки:

$$V = \frac{\Delta m}{\mu} \frac{RT_1 T_2}{p_2 T_1 - p_1 T_2} \approx 250 \text{ см}^3.$$

Объём V складывается из верхнего цилиндрического объёма $V_1 = \pi d^2(H - h)/4 \approx 21,2 \text{ см}^3$ и нижнего конического (усечённый конус) V_2 (рис. 26). Для расчётов удобно разбить объём фигуры по-другому: объём V_k конуса и объём V_0 , оставшийся от цилиндра после изъятия конуса (на рисунке заштрихован):

$$V_0 = 21,2 \text{ см}^3 - \pi d^2(H - h)/12 \approx 14,1 \text{ см}^3.$$

Итак,

$$V = 14,1 \text{ см}^3 + \frac{\pi y^3}{12} \approx 250 \text{ см}^3, \quad \text{откуда} \quad y \approx 10 \text{ см}.$$

Наконец, допустимый уровень жидкости:

$$x = H - y \approx 20 \text{ см}.$$

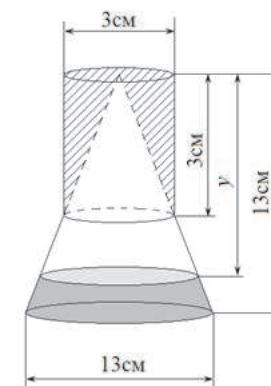


Рис. 26

Задача 5. Неисправная ракета

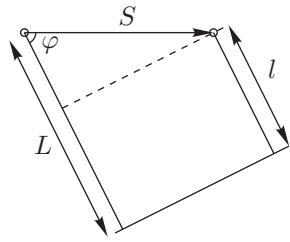


Рис. 27

Если источник звука движется, то частота звука, которую слышит неподвижный наблюдатель, может отличаться от испускаемой частоты. Этот эффект называется эффектом Доплера. Выведем формулу эффекта Доплера для неподвижного наблюдателя и движущегося источника.

За период волны T источник сместится на расстояние $S = vT$, а фронт волны приблизится к наблюдателю на расстояние $L = cT$ (рис. 27). Таким

образом, расстояние между фронтами в направлении к наблюдателю составит $l = L - S \cos \varphi = (c - v \cos \varphi)T$, а частота:

$$f = \frac{c}{l} = \frac{c}{(c - v \cos \varphi)T} = \frac{f_0}{1 - (v/c) \cos \varphi}. \quad (1)$$

1. Если ракета летит прямо на датчик, то $\varphi = 0$:

$$f_{\max} = \frac{f_0}{1 - v/c},$$

и частота звука повышается.

2. При произвольном угле φ :

$$f = \frac{f_0}{1 - (v/c) \cos \varphi}.$$

Частота $f > f_0$, если проекция скорости ракеты на направление на датчик положительная ($\cos \varphi > 0$), и $f < f_0$ в обратном случае. Если угол $\varphi = \pi/2$, то $f = f_0$.

3. Существуют два принципиальных положения датчика: внутри круга, описываемого ракетой, и снаружи него¹. Рассмотрим ситуацию, когда датчик находится снаружи.

В этом случае точки, из которых от ракеты приходят максимальная и минимальная частоты, являются концами (M_1 и M_2 соответственно) отрезков касания из положения датчика A к траектории ракеты (рис. 28). А так как в силу симметрии $AM_1 = AM_2$, то задержки между испусканием и приёмом звука для точек M_1 и M_2 одинаковы. Это означает, что точки M_1 и M_2 делят длину окружности в том же отношении, что и точки максимума и минимума на графике частоты делят период сигнала. Максимальная частота $f_{\max}^{\text{out}} = f_{\max}$.

¹Вообще говоря, датчик может находиться на траектории окружности, но в этом случае в момент пролёта ракеты над датчиком должен наблюдаться резкий скачок частоты, чего нет на графиках.

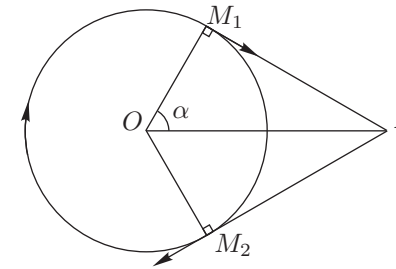


Рис. 28

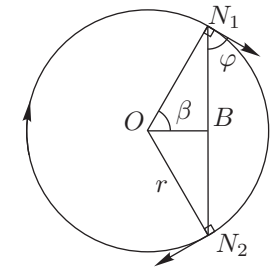


Рис. 29

Если датчик находится внутри траектории (рис. 29), то угол φ между скоростью ракеты и направлением на датчик уже не сможет принимать значения 0 и π как в предыдущем случае. Чтобы найти его наибольшее и наименьшее значения, рассмотрим треугольник OBN_1 . В нём $ON_1 = r$ — радиус траектории, $OB = b$ — расстояние от центра траектории до датчика, $\angle ON_1B = \theta = \pi/2 - \varphi$, $\angle OBN_1 = \gamma$. Заметим, что угол θ при любом положении точки N_1 является острым, и по теореме синусов его синус равен:

$$\sin \theta = \frac{b}{r} \sin \gamma.$$

Так как $b < r$, то $\sin \theta$ принимает наибольшее значение, когда $\sin \gamma = 1$, то есть $\gamma = \pi/2$. А поскольку $|\cos \varphi| = |\sin \theta|$, то $\cos \varphi$ принимает наибольшее и наименьшее значения в точках N_1 и N_2 — концах хорды с центром в B .

Опять-таки в силу симметрии и равенства $BN_1 = BN_2$, точки N_1 и N_2 делят длину окружности в том же отношении, что и точки максимума и минимума на графике частоты делят период сигнала.

При этом максимальная частота:

$$f_{\max}^{\text{in}} = \frac{f_0}{1 - \frac{v}{c} \cos \varphi} = \frac{f_0}{1 - \frac{vb}{cr}} < f_{\max}.$$

Обратимся теперь к графику и заметим, что для обоих датчиков время от максимума до минимума частоты равны: $t_1 = t_2 = T/4 = 6$ с, где $T = 24$ с — период сигнала (период вращения ракеты). Таким образом, в обоих случаях $2\alpha = 2\beta = \pi/2$. А так как при этом максимальная частота для датчика 1 больше максимальной частоты для датчика 2, то это возможно только, когда датчик 1 находится снаружи траектории, а датчик 2 — внутри.

Рассмотрим график 1:

$$f_{\max}^{\text{out}} = \frac{f_0}{1 - v/c} = 1,32 \text{ кГц}, \quad f_{\min}^{\text{out}} = \frac{f_0}{1 + v/c} = 0,88 \text{ кГц},$$

откуда найдём частоту $f_0 = 1,056$ кГц и скорость ракеты $v = c/5 = 66$ м/с.

Зная период $T = 24$ с и скорость ракеты v , определим радиус её траектории:

$$r = \frac{vT}{2\pi} = 252 \text{ м.}$$

Теперь можно найти расстояния от центра траектории до датчиков:

$$a = \frac{r}{\cos \alpha} = \sqrt{2}r = 357 \text{ м}, \quad b = r \cos \beta = r/\sqrt{2} = 178 \text{ м.}$$

Осталось найти угол ψ между OA и OB , который приводит к тому, что между максимумами графиков образуется фазовый сдвиг $\tau = T/3 = 8$ с. Однако, надо учитывать, что так как $a \neq b$, то в этот сдвиг входит разница во времени распространения сигнала от ракеты до датчиков. Таким образом:

$$\psi = \frac{\tau}{T} + \frac{AM_1}{c} - \frac{BN_1}{c} = \frac{2\pi}{3} + \frac{2 - \sqrt{2}}{10} = 2,15 \text{ рад.}$$

Отметим, что вклад от разницы задержек сигналов составляет около 3%, что является погрешностью того же порядка, что и погрешность определения времён по графику.

Окончательно найдём расстояние между датчиками по теореме косинусов:

$$L = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \psi} = 478 \text{ м.}$$