11 класс

XI. 1 СОЛНЦЕ В ЗВЕЗДНУЮ ПОЛНОЧЬ

О.С. Угольников

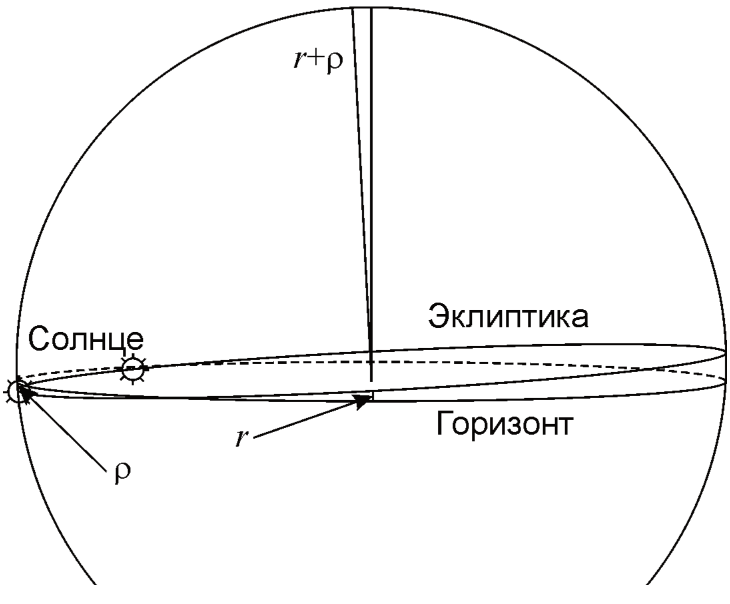
? Определите, существуют ли на Земле точки, обладающие следующим свойством: каждый раз, когда звездное время в Орле составляет 0ч, в этих точках Земли обязательно светит Солнце (если только нет облаков). Определите координаты этих точек, если они существуют. Координаты города Орел: 53° с.ш., 36° в.д.

! Каждый раз, когда звездное время в Орле составляет 0ч (а это случается каждые звездные сутки, то есть не менее 366 раз в году), Солнце занимает различное положение на эклиптике. В любой другой точке Земли звездное время в эти моменты также будет одинаковым (хотя и не обязательно равным нулю), то есть положение далеких звезд и самой линии эклиптики будет одним и тем же. Солнце может быть над горизонтом в любой момент, только если сама эклиптика будет совпадать с горизонтом (или образовывать с ним очень маленький угол). Солнце будет видно чуть выше горизонта за счет явления атмосферной рефракции. Вблизи зенита при этом будет северный или южный полюс эклиптики. Подобная ситуация может быть в непосредственной близости от Северного полярного круга (широта φ_1=+66.6°) при звездном времени S_1=18ч (в зените северный полюс эклиптики) и вблизи Южного полярного круга (широта φ_2=–66.6°) при звездном времени S_2=6ч.

Обозначим звездное время в Орле как S_0, долготу Орла – λ_0. В любой фиксированный момент звездное время увеличивается с долготой точки наблюдения. Отсюда получаем:

$$\lambda_1 = \lambda_0 + (S_1 - S_0) = 20^ч24^м \text{ или } 54° \text{ з.д.}$$
$$\lambda_2 = \lambda_0 + (S_2 - S_0) = 8^ч24^м \text{ или } 126° \text{ в.д.}$$

В итоге, мы получаем две точки с координатами (+66.6°, –54°), (–66.6°, +126°). Строго говоря, за счет атмосферной рефракции r и видимых размеров Солнца ρ условие задачи будет выполняться не только в этих точках, но и в их окрестностях радиусом 95 км, соответствующим дуге 0.85° (сумма величины рефракции у горизонта и углового радиуса Солнца, см. рис.). При таком удалении полюса эклиптики от зенита хотя бы верхний край Солнца останется видимым.



XI. 2 ПОБЕГ ОТ СОЛНЦА

О.С. Угольников

? Предположим, Солнце стало терять массу со скоростью 1 миллиард тонн в секунду. На какое расстояние удалится от него Земля за 1 год? Изначальную орбиту Земли считать круговой.

! Изменение массы Солнца происходит равномерно, одинаково для всех положений Земли. Следовательно, круговая орбита Земли не будет приобретать эксцентриситета, лишь медленно увеличивая свой радиус, фактически являясь очень туго закрученной спиралью. Медленно меняется не только радиус орбиты, но и скорость движения Земли по ней, причем она будет уменьшаться. Ситуация противоположна движению тела в поле тяжести в среде, оказывающей торможение, в результате которого тело приближается к центру тяжести и увеличивает скорость. В случае, описанном в условии задачи, уменьшение скорости будет обеспечиваться притяжением Солнца при удалении Земли от него.

Для кругового движения в поле тяжести тела с массой M справедливо соотношение:

$$v^2 = \frac{GM}{R}.$$

Здесь R и v – радиус орбиты и скорость движения тела по ней. На Землю будет действовать только сила притяжения, направленная к Солнцу. Поэтому будет справедлив закон сохранения момента импульса (или II закон Кеплера) для кругового движения:

$$v \cdot R = \text{const}.$$

Подставляя второе уравнение в первое, получаем:

$$M \cdot R = \text{const}.$$

Радиус орбиты Земли будет увеличиваться обратно пропорционально массе Солнца. Пусть за какое-то время ΔT Солнце потеряло массу ΔM (много меньшую самой массы Солнца M). Пользуясь формулами приближенного вычисления, получаем величину приращения радиуса орбиты:

$$\Delta R = R\frac{\Delta M}{M}.$$

За один год ($3.2 \cdot 10^7$ секунд) Солнце «похудеет» на $3.2 \cdot 10^{19}$ килограмм. Радиус орбиты Земли увеличится на 2.4 метра.

XI. 3 СОЕДИНЕНИЕ ВЕНЕРЫ И ЮПИТЕРА

О.С. Угольников

? Планеты Венера и Юпитер вступают в соединение друг с другом, имея одинаковые экваториальные угловые размеры. Чему равно угловое расстояние между Венерой и Солнцем в этот момент? Орбиты Венеры, Земли и Юпитера считать круговыми и лежащими в одной плоскости.

! Изобразим конфигурацию, описанную в условии задачи. Пусть R_0, R_1 и R_2 – радиусы орбит Земли, Венеры и Юпитера, а d_1 и d_2 – расстояния от Земли до Венеры и Юпитера соответственно. Венера может находиться в одном из двух положений (1 и 2 на рисунке). Обозначив наблюдаемый угол между Венерой (и Юпитером) и Солнцем через γ, запишем выражения теоремы косинусов:

$$R_1^2 = R_0^2 + d_1^2 - 2R_0 d_1 \cos\gamma,$$
$$R_2^2 = R_0^2 + d_2^2 - 2R_0 d_2 \cos\gamma.$$

Угловые диаметры Венеры и Юпитера совпадают, следовательно

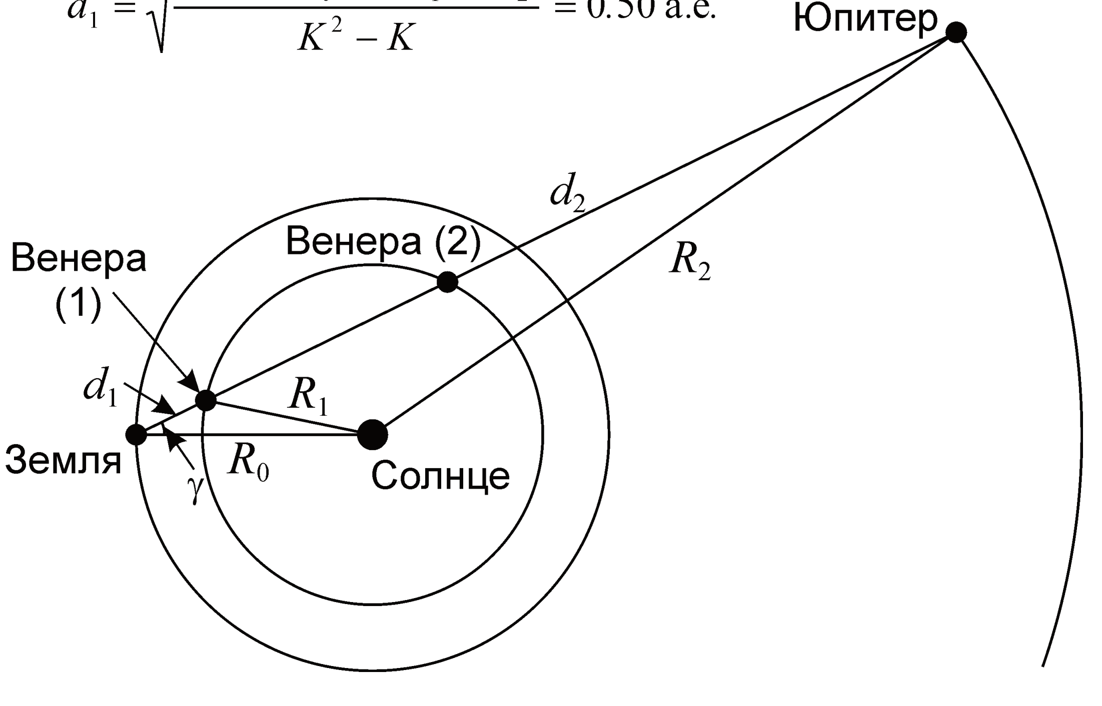
$$\frac{d_2}{d_1} = \frac{r_2}{r_1} \equiv K.$$

Здесь r_1 и r_2 – экваториальные радиусы Венеры и Юпитера, а число K составляет 11.8. Умножим первое из уравнений теоремы косинусов на K и вычтем второе уравнение из первого:

$$KR_1^2 - R_2^2 = (K-1)R_0^2 + (K-K^2)d_1^2.$$

В результате,

$$d_1 = \sqrt{\frac{(K-1)R_0^2 - KR_1^2 + R_2^2}{K^2 - K}} = 0.50 \text{ а.е.}$$



Очевидно, Венера находится в положении (1) на рисунке, ближнем к Земле. Из первой формулы теоремы косинусов имеем

$$\gamma = \arccos \frac{R_0^2 + d_1^2 - R_1^2}{2R_0 d_1} = 43^\circ .$$

XI. 4 КОРОТКАЯ ВСТРЕЧА

О.С. Угольников

? Некоторая звезда пролетела мимо Солнца на минимальном расстоянии 1 пк. Через 100 тысяч лет ее блеск в небе Земли уменьшился на 2^m. Какова скорость звезды относительно Солнца (в км/с)? Физические свойства звезды считать постоянными по времени.

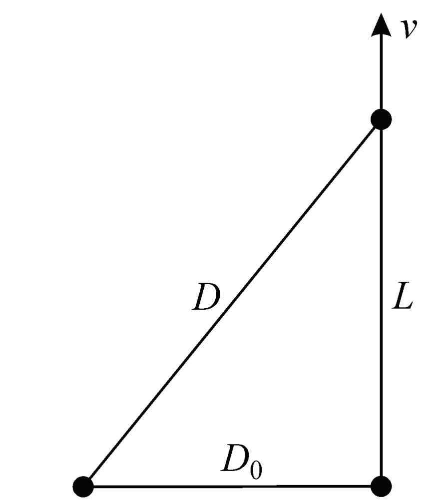
! 100 тысяч лет – достаточно короткое время по сравнению с орбитальными периодами звезд в Галактике. За это время скорость звезды (как и Солнца) практически не изменяется. В момент сближения с Солнцем звезда двигалась перпендикулярно направлению на него. Расстояние между звездами было равно D_0. Через время T оно стало равным D, причем эти расстояния связаны соотношением:

$$\frac{D}{D_0} = 10^{0.2\cdot\Delta m} \approx 2.5.$$

Здесь Δm – уменьшение блеска звезды за этот период. Путь, проделанный звездой относительно Солнца, равен

$$L = \sqrt{D^2 - D_0^2} = D_0\sqrt{10^{0.4\cdot\Delta m} - 1} = 2.3 \text{ пк}.$$

Скорость звезды v, равная L/T, составляет 2.3 пк за 100000 лет. Это равно 4.7 а.е. в год или 23 км/с.



XI. 5 МИГАЮЩИЕ ПЛАНЕТЫ

О.С. Угольников

? Представьте себе, что Солнце стало короткопериодической переменной звездой с периодом 125 минут. Практически с тем же периодом стал меняться видимый на Земле блеск планет, а у одной внешней большой планеты максимумы могли наблюдаться в то же время, что и максимумы блеска Солнца. Что это за планета?

! Как известно, в видимой области спектра планеты сами не излучают, а лишь отражают свет Солнца. Поэтому неудивительно, что их блеск в описанном в условии случае также начнет изменяться с похожим периодом. Однако наблюдаемые на Земле моменты максимумов блеска планет будут отличаться от моментов максимума блеска Солнца, так как время распространения сигнала по траектории «Солнце – внешняя планета – Земля» больше, чем по прямой линии от Солнца до Земли.

Максимумы будут совпадать, если разница времени распространения сигналов по двум траекториям окажется равной целому числу периодов. Свет от Солнца до Земли распространяется за время a_0/c, а по траектории «Солнце-планета-Земля» – за время l/c, где a_0 – расстояние от Земли до Солнца, а l – длина траектории «Солнце-планета-Земля». Определим расстояние, которое свет проходит за один период:

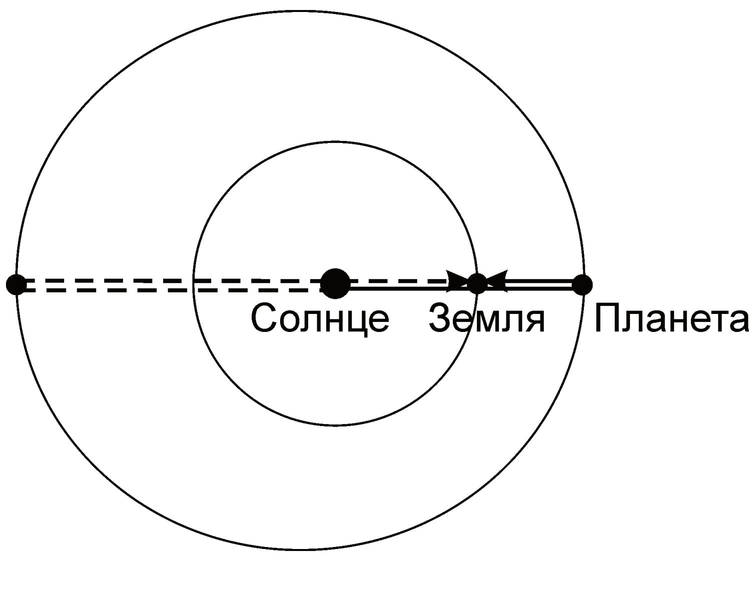
$$L_0 = cT = 2.25 \text{ млрд км} = 15 \text{ а.е.}$$

Разница во времени движения двух световых лучей к Земле должна быть $N\cdot T$, где N – натуральное число. Тогда

$$\frac{l}{c} - \frac{a_0}{c} = NT;$$

$$l = a_0 + NL_0 = 1 + 15 \cdot N \text{ (а.е.)}.$$

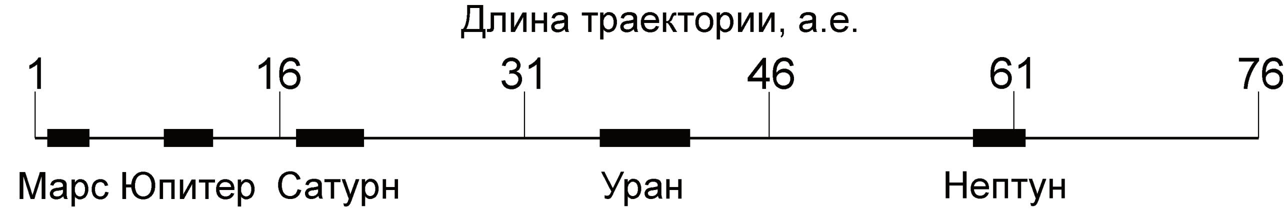
Таким образом, путь пройденный лучом, отраженным от планеты может быть равен 16 а.е., 31 а.е., 46 а.е., 61 а.е. и т.д.



Считая орбиту Земли круговой, определим минимальную и максимальную длины траекторий для внешней планеты:

$$l_{\mathrm{MIN}} = 2a\,(1 - e) - 1;$$
$$l_{\mathrm{MAX}} = 2a\,(1 + e) + 1;$$

Здесь a и e – большая полуось и эксцентриситет орбиты планеты. Отметим, что в случае максимальной длины траектории



планета будет в соединении с Солнцем и не будет видна. Однако, ее можно будет наблюдать в достаточно близкой конфигурации, с практически той же длиной траектории. Занесем величины длин траекторий в таблицу:

Планета	Большая полуось, *a*, а.е.	Эксцентриситет, *e*	Минимальная траектория, а.е.	Максимальная траектория, а.е.
Марс	1.52	0.093	1.76	4.32
Юпитер	5.20	0.048	8.90	11.90
Сатурн	9.54	0.056	17.01	21.15
Уран	19.19	0.046	35.61	41.15
Нептун	30.06	0.010	58.52	61.72

Сразу понятно, что этой планетой не могут быть Марс и Юпитер, для которых этот путь существенно короче 16 а.е. (для Юпитера, даже с учетом эксцентриситета его орбиты, путь не может быть более 11.9 а.е.). Не годятся на эту роль и Сатурн с Ураном, у которых также максимумы, видимые на Земле, не будут совпадать по времени с максимумами Солнца.

Остается последняя возможность – Нептун. Большая полуось его практически круговой орбиты составляет 30 а.е., а в афелии он удаляется от Солнца на 30.35 а.е. В этот момент он вполне может оказаться в 30.65 а.е. от Земли, удовлетворяя условию совпадения максимумов для $N=4$. При этом он не будет в соединении с Солнцем и сможет наблюдаться на земном небе. Итак, задача имеет единственный ответ – Нептун.

XI. 6 ТРЕК МЕТЕОРА

А.М. Татарников, О.С. Угольников

? С помощью неподвижного цифрового фотоаппарата с объективом с фокусным расстоянием 50 мм, чувствительной матрицей с диагональю 27.3 мм и форматом 3000x2000 элементов сделан снимок звездного неба с длинной выдержкой. На нем зафиксирован пролет через зенит метеора из потока Персеид кометного происхождения. Метеор имеет длину 20°, а его изображение на снимке, в среднем, имеет такую же ширину и яркость, как след Веги ($\alpha=18.5^ч$, $\delta=+38°$, 0^m), также попавшей в кадр. Оцените размер метеорного тела, если известно, что оно летело горизонтально, загорелось и погасло на высоте 100 км. Считать, что 1% кинетической энергии метеорного тела переходит в видимый свет. Скорость метеорных тел потока Персеиды при влете в атмосферу составляет 59 км/с. Уменьшением скорости в атмосфере пренебречь.

! Треки Веги и метеора имеют на снимке одинаковую толщину и яркость, но эти два светила двигались по небу с существенно разной угловой скоростью. Для Веги она равна

$$\omega_1 = \omega_0 \cos\delta = 5.7 \cdot 10^{-5}\ \text{с}^{-1}.$$

Здесь ω_0 – угловая скорость суточного вращения неба. Угловую скорость метеора можно определить с учетом того, что он наблюдался в зените и летел горизонтально, то есть перпендикулярно лучу зрения:

$$\omega_2 = \frac{v}{h} = 0.59\ \text{с}^{-1}.$$

Здесь v – скорость метеора, h – его высота. Получается, что каждый элемент матрицы, на который попало изображение метеора, был освещен в течение меньшего времени, чем элемент матрицы, освещенный Вегой. Отсюда мы можем найти соотношение звездных величин метеора и Веги:

$$m_2 - m_1 = -2.5\lg\frac{\omega_2}{\omega_1}.$$

Учитывая, что блеск Веги составляет 0^m, звездная величина метеора оказывается равной -10^m – это был очень сильный болид. Чтобы определить поток световой энергии от метеора, сравним его с Солнцем (блеск $m_0 = -26.8$, поток в видимой части спектра $J_0 = 600$ Вт/м^2):

$$J_2 = J_0 10^{-0.4(m_2 - m_0)}.$$

Мы получаем величину $1.1 \cdot 10^{-4}$ Вт/м^2. Длительность полета метеора составляет

$$T = l / \omega_2,$$

где l – угловая длина метеора в радианах. Численное значение длительности составляет 0.6 секунды, а поток световой энергии от него на единицу площади

$$F = J_2 T \sim 6.5 \cdot 10^{-5}\ \text{Дж/м}^2.$$

Отсюда мы можем оценить полную световую энергию метеора:

$$E_L = 4\pi h^2 \cdot F = 8\ \text{МДж}.$$

Кинетическая энергия метеорного тела E_T при влете в атмосферу была еще в 100 раз больше, то есть $8 \cdot 10^8$ Дж. Зная скорость тела, можно определить его массу:

$$M = 2E_T / v^2 = 0.5\ \text{кг}.$$

Получается, что даже самые мощные болиды порождаются сравнительно малыми телами. Чтобы определить размер метеорного тела, учтем, что поток Персеиды имеет кометное происхождение, и характерная плотность тел ρ порядка 0.2-1 г/см^3. Размер тела равен

$$r \sim (M/\rho)^{1/3} \sim 10\ \text{см}.$$