



10 класс

X. 1

ЛУНА НАД ВЕСЕННИМ ОРЛОМ

О.С. Угольников

? 20 марта в Орле в $19^{\text{ч}}36^{\text{м}}$ по московскому времени астрономический азимут Луны составляет 0° . Чему равна ее высота над горизонтом? Параллаксом, наклоном орбиты Луны к эклиптике и уравнением времени пренебечь. Координаты города Орел: 53° с.ш., 36° в.д.

! Переведем долготу Орла λ в часовую меру, получим $2^{\text{ч}}24^{\text{м}}$. Московское время $T_{\text{М}}$ отличается от Всемирного времени UT на 4 часа. Определим среднее солнечное (местное) время действия условия задачи:

$$T = T_{\text{М}} - 4 + \lambda = 18^{\text{ч}}.$$

Картина наблюдается в день весеннего равноденствия. Астрономический азимут Луны составляет 0° , следовательно, она находится в верхней кульминации. Солнце в это же время заходит на западе, следовательно, Луна в этот момент наблюдается в фазе первой четверти в точке летнего солнцестояния. Пренебрегая наклоном орбиты Луны к эклиптике, считаем ее склонение равным ε (примерно 23°). Высота Луны над горизонтом равна

$$h = 90^{\circ} - \varphi + \varepsilon = 60^{\circ}.$$

Здесь φ – широта города Орел. В реальности, наклон орбиты Луны к эклиптике может изменять высоту Луны от 55° до 65° . Можно также учесть, что сам момент весеннего равноденствия может отстоять на ± 12 часов от времени наблюдения. Однако, положение Солнца на эклиптике нам все равно известно лучше ($\pm 0.5^{\circ}$), чем положение Луны ($\pm 5^{\circ}$) на меридиане, вследствие чего этим эффектом можно пренебечь.

IX / X. 2

ШАГОВЫЙ ДВИГАТЕЛЬ

А.М. Татарников

? На экваториальной монтировке установлен шаговый двигатель, отвечающий за суточное ведение телескопа. Угол, на который поворачивается ось двигателя при шаге, составляет 2° . С какой частотой надо осуществлять шаги, если для передачи вращения от оси двигателя на полярную ось телескопа используется два последовательно установленных редуктора (системы шестеренок, уменьшающих угловую скорость) – основной с передаточным числом 1:360 и дополнительный с передаточным числом 1:5?

! Обозначим угол поворота оси двигателя при шаге как γ . Полярная ось телескопа присоединена к двигателю через два редуктора с передаточными числами k_1 и k_2 . Угол, на который при шаге повернется телескоп, составит $\gamma \cdot k$ (это составит $4''$). Частота шагов ν должна быть такой, чтобы получившаяся угловая скорость была равна угловой скорости вращения Земли (или видимого вращения небесной сферы):

$$\nu \cdot \gamma \cdot k_1 \cdot k_2 = \omega = \frac{360^\circ}{T} \quad 1k_2$$

Здесь T – период вращения Земли (звездные сутки). Отсюда получаем выражение для частоты:

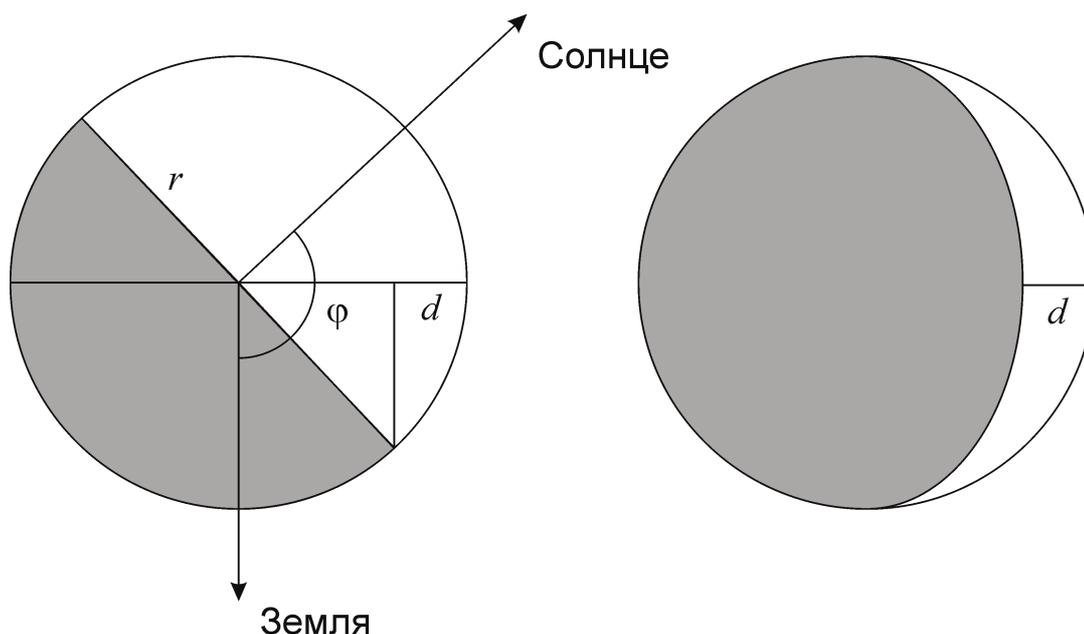
$$\nu = \frac{360^\circ}{\gamma k_1 k_2 T} = 3.76 \text{ Гц.}$$

Х. 3 ЧАСТИЧНО ОСВЕЩЕННОЕ ТЕЛО

О.С. Угольников

? Некоторое тело Солнечной системы сферической формы при наблюдении с Земли имеет фазу F . Определите максимально возможное расстояние от Земли до данного тела в этот момент. Орбиту Земли считать круговой.

! Как видно из рисунка, фаза сферического тела (доля освещенной части диска или освещенной части диаметра, проходящего через середину терминатора) равна



$$F = \frac{d}{2r} = \frac{1 + \cos\varphi}{2},$$

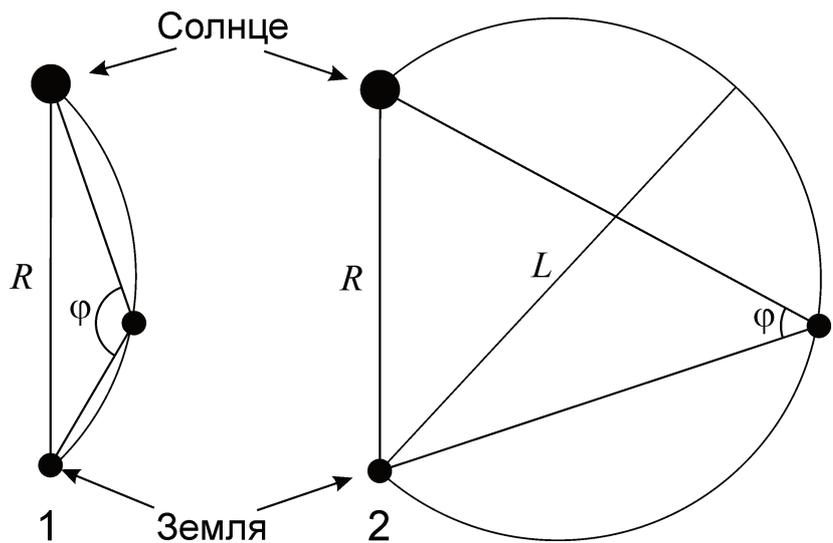
где φ – угол с вершиной в центре тела, образованный направлениями на Солнце и Землю (его еще называют фазовым углом). Для него выполняется очевидное соотношение

$$\varphi = \arccos(2F - 1).$$

Изобразим Солнце, Землю и наблюдаемое тело (плоскость рисунка не должна обязательно совпадать с плоскостью эклиптики). Обозначим расстояние между Солнцем и Землей через R . Если фаза тела F меньше 0.5, и фазовый угол φ больше 90° (случай 1 на рисунке), то тело должно находиться на малой дуге окружности, описанной около треугольника «Солнце-Земля-тело». Очевидно, что максимально возможное расстояние между Землей и телом L равно R и достигается, если тело находится вблизи Солнца.

В случае 2 (фаза F больше 0.5, фазовый угол φ меньше 90°) тело будет находиться на большой дуге окружности. Максимальное расстояние от Земли L будет равно диаметру этой окружности. Из теоремы синусов имеем:

$$L = \frac{R}{\sin\varphi} = \frac{R}{2\sqrt{F(1-F)}}.$$



IX / X - 4

СКВОЗЬ КОЛЬЦА САТУРНА

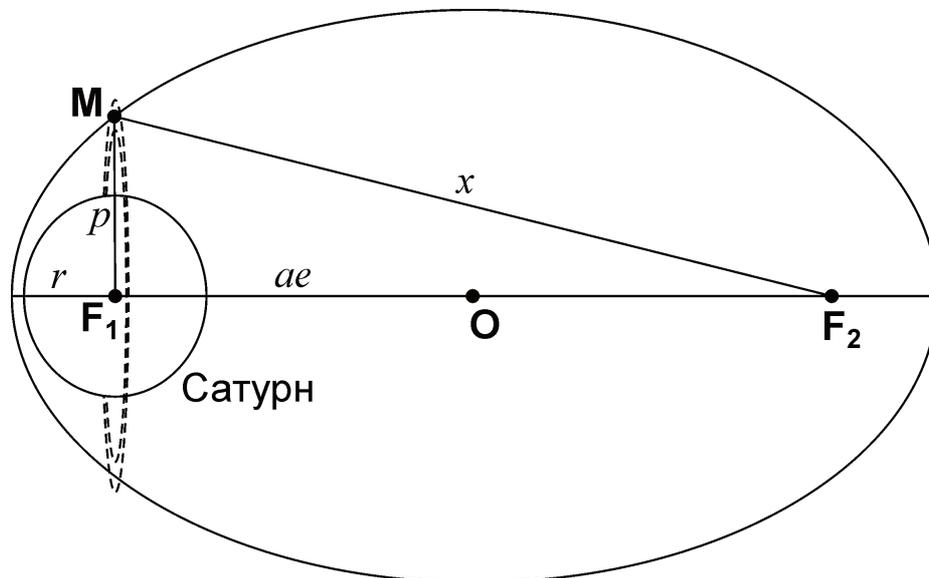
Е.Н. Фадеев

? Космический корабль прошел точку перисатурния над полюсом Сатурна на расстоянии его экваториального радиуса от центра планеты, после чего пролетел сквозь щель Энке (радиус $1.34 \cdot 10^5$ км) в кольцах. Определите расстояние апосатурния этого корабля. Останется ли аппарат искусственным спутником Сатурна?

10 класс: Решить задачу также для аппарата, пролетающего сквозь щель Гюйгенса (радиус $1.17 \cdot 10^5$ км).

Теоретический тур – 10 класс

! Как известно, из-за быстрого вращения планета Сатурн заметно сжата, ее полярный радиус на 10% меньше экваториального. Поэтому корабль мог пролететь над полюсом на столь близком расстоянии от центра планеты. Он двигался относительно Сатурна по одному из конических сечений: эллипсу, параболе или гиперболе. Предположим, что корабль двигался по эллипсу. Кольца Сатурна расположены в плоскости его экватора. Поэтому в этом эллипсе нам известно расстояние перисатурния r и фокальный параметр p – длина отрезка, перпендикулярного большой оси эллипса, соединяющего фокус F_1 с точкой эллипса M .



Расстояние перисатурния r есть $a(1-e)$, а расстояние от каждого из фокусов эллипса до его центра (точка O) равно ae , где a – большая полуось эллипса, e – его эксцентриситет. Сумма расстояний от каждой точки эллипса до его фокусов равна $2a$. Это относится и к точке M , в которой аппарат пролетел сквозь щель в кольцах:

$$2a = p + x = p + \sqrt{p^2 + 4a^2 e^2}.$$

Решая это уравнение, мы получаем:

$$\begin{aligned} p &= a(1 - e^2) = r(1 + e), \\ e &= (p/r) - 1. \end{aligned}$$

Подставляя в качестве p радиус щели Энке, получаем величину e , равную примерно 1.2. Таким образом, эта орбита не является эллиптической, и аппарат покинет окрестности Сатурна.

Далее – только для 10 класса:

Второй аппарат, пролетевший через щель Гюйгенса, действительно движется по эллиптической орбите с эксцентриситетом 0.94. Расстояние апосатурния этого корабля составит:

$$R = a(1 + e) = r \frac{1 + e}{1 - e} = \frac{rp}{2r - p}.$$

Получается, что аппарат, прошедший через щель Гюйгенса, должен удалиться от Сатурна на $1.96 \cdot 10^6$ км. На таком, и даже на большем расстоянии располагаются естественные спутники планеты. Значит, такой аппарат останется спутником Сатурна.

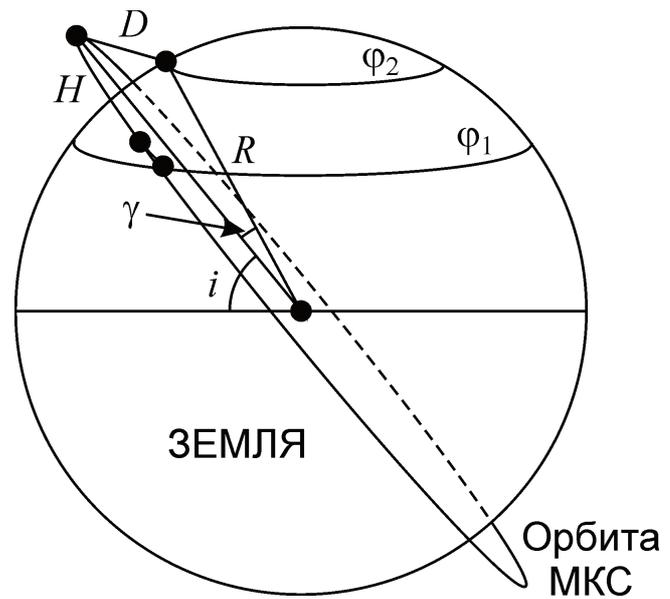
X. 5

МКС НА ЗВЕЗДНОМ НЕБЕ

О.С. Угольников

? Международная космическая станция обращается вокруг Земли по круговой орбите, наклоненной к плоскости экватора на 51° . Сравните максимальный видимый блеск МКС на широтах 46° и 56° . С какой широты МКС может быть ярче и на сколько звездных величин? Высота станции над поверхностью Земли составляет 400 км. Атмосферным ослаблением света пренебречь.

! Яркость Международной космической станции при наблюдении из определенной точки Земли достигает максимума, когда она располагается на минимальном расстоянии (при круговой орбите это соответствует максимальной высоте над горизонтом) и освещена Солнцем. Освещение Солнцем возможно для любого положения станции, а в летние месяцы освещение вблизи северной точки орбиты непрерывно. Поэтому для решения задачи нам достаточно найти соотношение минимальных расстояний от двух точек наблюдения до МКС.



Орбита МКС показана на рисунке. Очевидно, что в зависимости от положения на орбите, станция может проходить над любой точкой Земли с широтами от $-i$ до $+i$, где i – угол наклона орбиты станции к плоскости экватора Земли. Поэтому на широте $\varphi_1 = 46^\circ$ станция может наблюдаться в зените, находясь на расстоянии, равной высоте орбиты H . На широте $\varphi_2 = 56^\circ$ такое невозможно. Ближайшее положение станции будет достигаться, когда она окажется в северной точке своей орбиты, а наблюдатель – в ближайшей к ней точке своей параллели. Расстояние между станцией и наблюдателем будет равно

$$D = \sqrt{(R + H)^2 + R^2 - 2R(R + H) \cos \gamma} = \\ = \sqrt{2R^2(1 - \cos \gamma) + 2RH(1 - \cos \gamma) + H^2} \approx \sqrt{R^2 \gamma^2 + H^2}.$$

Здесь угол γ равен разности широты φ_2 и наклона i . Последнее равенство записано с учетом малости угла γ и представляет собой, по сути, теорему Пифагора, где соответствующая дуга считается прямой линией. Расстояние равно примерно 700 км. При наблюдении с этой широты станция будет выглядеть слабее, соотношение звездных величин равно

$$\Delta m = 2.51g \frac{D^2}{H^2} \approx 2.51g \left(1 + \frac{R^2 \gamma^2}{H^2} \right) = 1.2.$$

Х. 6

СПУТНИК СОЛНЦА

О.С. Угольников

? Предположим, у Солнца появилась звезда-спутник малой массы, которая в небе Земли светит как звезда -10^m , а средние угловые размеры у нее такие же, как у Урана. Какова эффективная температура этой звезды? Чему равен период ее обращения, если известно, что ее светимость в 100 раз меньше, чем светимость Солнца? Орбита звезды круговая.

! Звезда -10^m светит в $5 \cdot 10^6$ раз слабее Солнца. Средний угловой радиус Урана есть отношение его пространственного радиуса к расстоянию до Солнца, он равен $1.8''$, что в 530 раз меньше видимого радиуса Солнца. По закону Стефана-Больцмана светимость звезды B равна $4\pi\sigma R^2 T^4$, где R и T – радиус и температура звезды. Энергетический поток от звезды на расстоянии L равен

$$J = \frac{B}{4\pi L^2} = \frac{\sigma T^4 R^2}{L^2} = \sigma T^4 \rho^2,$$

где ρ – видимый радиус звезды. Сравнивая звезду-спутник с Солнцем (поток J_0 , температура T_0 , видимый радиус ρ_0), получаем выражение для температуры:

$$T = T_0 \left(\frac{J}{J_0} \right)^{1/4} \left(\frac{\rho_0}{\rho} \right)^{1/2}.$$

Эффективная температура звезды равна 2800 К. Учитывая, что светимость звезды B составляет одну сотую от светимости Солнца B_0 , получаем среднее расстояние до этой звезды:

$$L = L_0 \left(\frac{J_0}{J} \right)^{1/2} \left(\frac{B}{B_0} \right)^{1/2}.$$

Здесь L_0 – расстояние от Земли до Солнца (астрономическая единица). Подставляя численные данные, получаем 220 а.е. По условию задачи масса звезды невелика, и ее орбитальный период можно определить из упрощенного III закона Кеплера, сравнивая ее орбиту с земной:

$$\tau = \tau_0 \left(\frac{L}{L_0} \right)^{3/2}.$$

Орбитальный период звезды составляет 3300 лет.