5 задач, время – 150 мин ., 60 баллов.

№№ задач	1	2	3	4	5
Кол-во баллов	13	13	8	13	13

Задача 1. (13 баллов)

На островах Иль де Бонёр и Иль де Либертэ производят воздушные шарики, количество которых может выражаться только целым числом. Для производства одного воздушного шарика необходимы 2 единицы рабочей силы, 2 единицы латекса и 2 единицы гелия. Запасы имеющихся ресурсов на островах приведены в таблице:

	Иль де Бонёр	Иль де Либертэ
Рабочая сила	950	1500
Латекс	900	1400
Гелий	2000	1300

Между островами невозможен обмен рабочей силой – ни один житель этих островов не согласен эмигрировать. Будем называть обмен латексом, гелием и воздушными шариками взаимовыгодным, если в результате обмена обоим островам достанется больше воздушных шариков, чем при отсутствии обмена.

(а) Каково максимальное суммарное производство воздушных шариков на двух островах при отсутствии обмена ресурсами?
(б) Возможен ли такой обмен между островами, при котором суммарное производство воздушных шариков на двух островах будет больше 1200 штук? Если да, то приведите пример такого обмена; если нет, то докажите, почему.
(в) Предположим, что возможен обмен латексом, гелием и воздушными шариками между островами. Какое количество воздушных шариков может оказаться на острове Иль де Бонёр в результате взаимовыгодного обмена между островами? Укажите все возможные варианты.
(г) Предположим, что между островами возможен обмен латексом и гелием, но не возможен обмен воздушными шариками. Какое количество воздушных шариков может оказаться на острове Иль де Бонёр в результате взаимовыгодного обмена? Укажите все возможные варианты.

Решение:
Обозначим для краткости остров Иль де Бонёр за Б, а остров Иль де Либерте за Л.

(а) **(2б)** Так как на острове Б есть лишь 900 единиц латекса, то на этом острове может быть произведено максимум 450 воздушных шариков (при этом рабочей силы и гелия хватит). Поскольку остров Л располагает лишь 1300 единицами гелия, то на этом острове можно произвести максимум 650 воздушных шариков (при этом рабочей силы и латекса хватит). Следовательно, в сумме будет произведено не более 450+650=1100 воздушных шариков. Ответ: 1100 штук.

(б) **(2б)** Суммарный запас латекса на двух островах составляет 2300 единиц. Значит, в сумме может быть произведено не более 1150 воздушных шариков. Ответ: не возможен.

(в) **(5б)** Обозначим за x искомое количество воздушных шариков. Очевидно, что $x > 450$ – иначе такой обмен не будет взаимовыгодным.
В пункте (б) было доказано, что в сумме на двух островах может быть произведено не более 1150 воздушных шариков. Если при этом в результате обмена острову Б достанется хотя бы 500 воздушных шариков, то острову Л останется не более 650 воздушных шариков, то есть не больше, чем в отсутствие обмена. Такой обмен также не будет взаимовыгодным. Значит, $x < 500$.
Покажем, что любое число шариков от 451 до 499 на острове Б оказаться может.
Пусть остров Б отдаст острову Л 100 единиц гелия. Тогда остров Б сможет произвести самостоятельно 450 шариков (как и в отсутствие обмена). Зато остров Л сможет произвести, используя импортированный гелий,700 воздушных шариков. Если остров Л теперь отдаст (в обмен на гелий) от 1 до 49 воздушных шариков, то на острове Б окажется в итоге от 451 до 499 воздушных шариков, а на острове Л останется от 651 до 699 воздушных шариков. Такой обмен, как видим, будет взаимовыгодным.

(г) **(4б)** Вновь (из рассуждений о взаимовыгодности) получаем, что $450 < x < 500$. Однако теперь воздушные шарики нельзя перевозить, и, возможно, не все варианты 451, 452, … 499, удастся реализовать.
Теперь каждый остров будет потреблять только воздушные шарики, произведенные у себя. Поскольку запас рабочей силы на острове Л ограничен 950, то остров сможет произвести не более 475 шариков, то есть возникает дополнительное ограничение $x \le 475$.
(2 балла)
Покажем, что любое число шариков от 451 до 475 на острове Б оказаться может.
Пусть остров Б может поставит острову Л 50 единиц гелия. Если в обмен на это остров Л поставит острову Б от 2 до 50 единиц латекса, то остров Б как раз сможет произвести от 451 до 475 шариков. При этом заметим, что экспорт латекса не повредит собственному производству шариков на острове Л; с учетом импортированного гелия он сможет произвести 675 шариков независимо от количества экспортированного латекса, и обмен будет взаимовыгодным.

Ответ:
(а) 1100 шариков; (б) не возможен; (в) от 451 до 499 шариков; (г) от 451 до 475 шариков.

Критерии оценивания:
Пункт (а) — **2 б.**, из них по **1 б.** — за нахождение максимального производства шариков на каждом из островов.
Пункт (б) — **2 б.;**
Пункт (в) — **5 б.**, из них
1 б. — за нахождение и обоснование ограничения $x > 450$;
2 б. — за нахождение и обоснование ограничения $x < 500$;
2 б. — за построение примера обмена, показывающего, что любое значение x от 451 до 499 возможно. Решение, в котором такой пример не приведен, не может считаться полным, так как из того, что $450 < x < 500$, еще не следует, что все промежуточные варианты возможны (например, в пункте (г) ситуация как раз такова, возможны не все эти варианты).
Пункт (г) — **4 б.**, из них
2 б. — за получение и обоснование ограничения $450 < x \le 475$;
2 б. — за построение примера обмена, показывающего, что любое значение x от 451 до 475 возможно.

Задача 2. (13 баллов)
Зайдя на сайт сотового оператора X, Вы обнаружили, что данная компания предлагает клиентам три различных тарифа. Условия этих тарифов приведены в таблице:

Тариф	Абонентская плата	Цена за минуту	Примечание
I	нет	3 руб.	Минуты с 1-ой по 100-ую бесплатно
II	75 руб/мес	1,5 руб.	—
III	525 руб/мес	75 коп.	Минуты с 1-ой по 200-ую бесплатно

(а) Допустим, Вы планируете говорить по мобильному телефону x минут в месяц. Вы хотели бы, чтобы Ваши ежемесячные расходы на мобильную связь были минимальны. При каких значениях x Тариф II для Вас будет предпочтительнее остальных?

(б) Другой сотовый оператор — оператор Y — предлагает тариф, в котором цена за минуту равна 1 руб., а абонентская плата равна A рублей в месяц. Вы не знаете точно, сколько минут вы будете говорить в ближайшем месяце, но уверены, что не меньше 300 минут и не больше 500 минут. Вы планируете подключиться к оператору Y. В конце месяца Вы будете сожалеть о своем выборе, если Ваши фактические расходы на связь окажутся больше, чем расходы на такое же количество минут при использовании какого-то из тарифов оператора X. При каких значениях A Вы не будете сожалеть о своем выборе, независимо от того, сколько Вы фактически проговорите?

<u>Решение:</u>

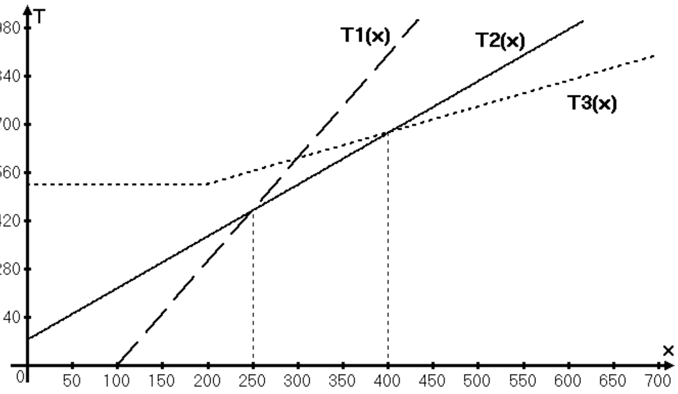
(а) **(6б)** Итак, пусть мы говорим x минут. Если выбрать тариф II, то ежемесячные расходы составят $T_2(x) = 75 + 1{,}5x$. **(1 б)**

Если выбрать первый тариф, то расходы составят $T_1(x) = \begin{cases} 0, x < 100; \\ 3(x-100), x \geq 100 \end{cases}$. **(1б)**

При третьем тарифе расходы составят $T_3(x) = \begin{cases} 525, x < 200; \\ 525 + 0{,}75(x-200), x \geq 200 \end{cases}$.**(1б)**

Второй тариф должен быть выгоднее первого, откуда $75 + 1{,}5x < 3(x-100)$, и значит, $x > 250$. **(1б)**
С другой стороны, второй тариф должен быть выгоднее третьего. Поскольку мы уже знаем, что $x > 250$, то $x \geq 200$, и значит, для третьего тарифа можно рассмотреть только этот случай.
$75 + 1{,}5x < 525 + 0{,}75(x-200)$, откуда $x < 400$. **(1б)**
Итак, второй тариф выгоднее других при $x \in (250; 400)$. **(1б)**

Графическая иллюстрация:



(б) **(7б)** Если воспользоваться услугами компании Y, то расходы составят $T_Y(x) = A + x$. Мы не будем сожалеть о выборе оператора Y, если наши расходы окажутся не больше, чем расходы при подключению к лучшему (при данном x) тарифу оператора X. **(1б)**
Из решения пункта (а) следует, что при $x \in [300; 400]$ лучшим является второй тариф оператора X, а при $x \in [400; 500]$ — третий тариф. **(1б)** Значит, нам достаточно найти, при каких значениях A выполнены одновременно два условия:
(1) $A + x \le 75 + 1{,}5x$ для всех $x \in [300; 400]$; **(1б)**
(2) $A + x \le 525 + 0{,}75(x - 200)$ для всех $x \in [400; 500]$. **(1б)**
Преобразуем эти условия:
(1) $A \le 75 + 0{,}5x$ при всех $x \in [300; 400]$. Поскольку правая часть этого неравенства возрастает по x, то условие (1) эквивалентно тому, что $A \le 75 + 0{,}5 \cdot 300 = 225$. **(1б)**
(2) $A \le 375 - 0{,}25x$ при всех $x \in [400; 500]$. Поскольку правая часть этого неравенства убывает по x, то условие (2) эквивалентно тому, что $A \le 375 - 0{,}25 \cdot 500 = 250$. **(1б)**

Итак, первое условие выполнено при $A \le 225$, а второе — при $A \le 250$. Значит, оба условия выполнены одновременно при $A \le 225$. **(1б)**

Ответ: (а) при $250 < x < 400$; (б) при $A \le 225$.

Критерии оценивания:
Пункт (а) — **6 б.** Критерии приведены в тексте решения.
Графическая иллюстрация для полного балла не обязательна, однако сам способ решения может быть графическим. В этом случае правильное решение должно включать в себя:
Правильное построение графика — **3 б.**;
Правильное нахождение координат точек пересечения графика $T_2(x)$ с графиками $T_1(x)$ и $T_3(x)$ — **2 б.**
Итоговый ответ — **1 б.**
Пункт (б) — **7 б.** Критерии приведены в тексте решения.
Также участники могут пойти другим путем — сравнивать тариф оператора Y не с лучшим тарифом из трех при данном x, а сразу со всеми тремя тарифами оператора X. В этом случае должно получиться три условия, и все три необходимо проверить для полного балла.
Кроме того, так же, как и в пункте (а), возможно графическое решение.

Задача 3 (8 баллов).
Все население города N-ска составляет 200 тыс. человек. В году 0 выпуск в городе находился на своем потенциальном уровне, равном 1000. В году 1 произошла рецессия, в результате которой без работы осталось 4 тыс. человек. Количество занятых в году 1 составило 91 тыс. человек; в том же году было произведено исследование, которое показало, что уровень естественной безработицы в городе равен 5%.
Каков был фактический объем выпуска в городе в году 1, если коэффициент Оукена равен 2,5?

<u>Решение:</u>

В году 0 выпуск находился на потенциальном уровне, и значит, изначально циклическая безработица равна нулю. Следовательно, количество циклических безработных в году 1 равно в точности 4 тыс. человек. **(1б)**

$u_{ест} = \frac{U_{ест}}{L} = \frac{U_{ест}}{U_{ест} + U_{цикл} + E}$ **(Верная формула - 2б)**

$0,05 = \frac{U_{ест}}{U_{ест} + 4 + 91}$, откуда $0,95U_{ест} = 0,05 \cdot 95$, и значит, $U_{ест} = 5$ тыс. человек.
(Верный расчет — 1б)

Отсюда находим величину рабочей силы: $L = 91 + 4 + 5 = 100$ тыс. человек. **(1б)**

$u_{цикл} = \frac{U_{цикл}}{L} = \frac{4}{100} = 4\%$. **(1б)**

Наконец, найдем фактический ВВП из закона Оукена:

$\frac{Y_{факт} - Y^*}{Y^*} = -\beta \cdot u_{цикл}$ **(Верная формула — 1б)**

$\frac{Y_{факт} - 1000}{1000} \cdot 100\% = -2,5 \cdot 4\% = -10\%$, откуда $Y_{факт} = 900$. **(Верный расчет — 1б)**

Ответ: 900.

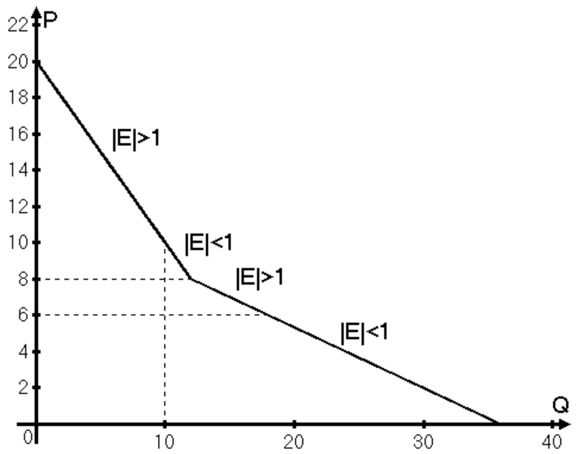
Критерии оценивания:
Приведены в тексте решения.
Задачу можно решить и без расчета промежуточные результатов — сразу выводя формулу для итогового ответа и затем подставляя в нее имеющиеся данные. В этом случае баллы, относящиеся к промежуточным ответам, начисляются за наличие верных алгебраических выкладок, приводящих к итоговому ответу.

Задача 4 (13 баллов).

На некотором рынке есть две группы потребителей, функции спроса которых линейны. Монополист, действующий на данном рынке, заметил, что пока он увеличивает объем продаж с нуля до 10 единиц, его выручка растет. При дальнейшем увеличении объема продаж его выручка падает, пока цена не станет равна 8. Однако если он будет наращивать объем продаж и дальше, то выручка будет расти вновь, пока цена не опустится до 6. После этого порога выручка фирмы снова падает, вплоть до того момента, когда выпуск не сравняется с максимальной величиной рыночного спроса, равной 36.

Восстановите функции спроса обеих групп потребителей.

Решение:



Если функции спроса обеих групп линейны, то рыночная функция спроса является кусочно-линейной функцией. Будем называть группу с более высокой максимальной ценой спроса «первой», а другую группу — «второй».

Обозначим максимальные цены спроса и величины спроса двух групп за $P^1_{\max}$, $P^2_{\max}$, $Q^1_{\max}$, $Q^2_{\max}$ соответственно.

Из поведения выручки ясно, что сначала рыночный спрос эластичен, затем неэластичен, затем снова эластичен, и наконец, снова неэластичен. При движении вдоль обычной линейной кривой спроса характер эластичности спроса может измениться максимум один раз. Значит, ситуация, описанная в условии, возможна, только когда на первых двух участках (вплоть до цены 8) мы двигаемся по «верхнему» отрезку суммарного спроса, а на вторых двух — «по нижнему». Значит, излом кривой рыночного спроса происходит при цене 8: $P^2_{\max} = 8$

Отсюда же ясно, что $Q = 10$ и $P = 6$ соответствуют двум точкам единичной эластичности рыночного спроса. Поскольку при $Q = 10$ потребляет только одна группа, то это и точка единичной эластичности ее спроса. Ее спрос линеен, и потому ее максимальная величина спроса $Q^1_{\max} = Q^1_d(0)$ ровно вдвое больше, чем величина спроса в точке единичной эластичности, то есть $Q^1_{\max} = 20$.

Поскольку $Q^1_{\max} + Q^2_{\max} = 36$, то $Q^2_{\max} = 16$. Теперь мы знаем, что $P^2_{\max} = 8$ и $Q^2_{\max} = 16$, и поэтому (по двум точкам) можем легко восстановить функцию спроса второй группы: $Q_2(P) = 16 - 2P$.

$P=6$ — это точка единичной эластичности суммарного спроса на участке, когда потребляют обе группы. Объем суммарного спроса в этой точке вдвое меньше, чем максимальный объем суммарного спроса, и потому он равен $36/2=18$. Зная две точки на этом участке спроса $(Q=36, P=0)$ и $(Q=18, P=6)$, восстанавливаем его уравнение: $Q_{рын}(P)=36-3P$.

Теперь функцию спроса первой группы можно получить, просто вычитая из рыночного спроса спрос второй группы: $Q_1(P)=Q_{рын}(P)-Q_2(P)=20-P$.

Ответ: $Q_1(P)=20-P$, $Q_2(P)=16-2P$.

Критерии оценивания:
Интерпретация условия в терминах эластичности спроса — (**3б).**
Идея о том, что точка $P=8$ — это точка излома кривой рыночного спроса — **(2б).**
Идея о том, что точки, где $Q=10$ и $P=6$ — это две точки единичной эластичности кривой рыночного спроса — (**2б).**

Итоговое восстановление двух функций — (**6 б)** (по **3 б.** за функцию).

Также задачу можно решить, и не привлекая понятие эластичности. В этом случае наиболее естественный способ заключается в том, чтобы ввести в общем виде функции $Q_1=a-bP$ и $Q_2=c-dP$, а затем попытаться найти значения параметров a, b, c, d из имеющихся данных. Но и этот способ вряд ли будет эффективным, если не догадаться, что 8 — это не что иное, цена в точке излома функции рыночного спроса.

Задача 5. (13 баллов)

Рыболовецкое хозяйство «Без труда…» использует в производстве единственный переменный фактор — труд. Производственная функция фирмы задана уравнением $Q = 2\sqrt{L}$, где Q — выпуск фирмы, L — количество нанятых работников. Фирма является совершенным конкурентом как на рынке продукта, так и рынке труда; цена продукта равна 20 д.е., зарплата же равна 5. д.е

.

(а) Найдите, какой объем труда наймет фирма, каковы будут ее выпуск и прибыль?

Государство хотело бы с помощью субсидии стимулировать фирму нанимать больше работников. Оно рассматривает два варианта субсидирования:

(i) Выплачивать фирме 1 д.е. за каждого нанятого работника;

(ii) Выплачивать фирме s д.е. за каждую произведенную единицу продукции.

(б) Объясните, почему вторая мера также является способом побудить фирму нанимать больше работников;

(в) Определите, каким будет количество работников, нанятых фирмой, если будет реализована мера (i);

(г) Определите, какой должна быть ставка s в случае введения меры (ii), чтобы оба варианта (i) и (ii) привели к одинаковому увеличению количества работников, нанятых фирмой, по сравнению с пунктом (а).

(д) Допустим, ставка s соответствует найденной вами в предыдущем пункте, и потому эффект от обеих мер одинаковый. Какая из двух мер потребует от государства меньших расходов на субсидию?

<u>Решение:</u>

(а) **(3б)** Фирма решает задачу максимизации прибыли: $\pi(L) = 20 \cdot 2\sqrt{L} - 5 \cdot L - FC \to \max$
Приравняв производную к нулю (или, что то же самое, приравняв предельный продукт труда в денежном выражении к зарплате) , получим, что $\frac{20}{\sqrt{L}} = 5$, откуда $L = 16$.

Выпуск фирмы будет равен $2\sqrt{16} = 8$, а $\pi(16) = 80$.

(б) **(2б)** Вторая мера побудит фирму увеличить предложение продукции, но поскольку труд является единственным переменным фактором производства, фирме для этого придется нанять больше работников, и в итоге занятость на фирме также увеличится.

(в) **(3б)** В новой ситуации фирма решает задачу $\pi(L) = 20 \cdot 2\sqrt{L} - 5 \cdot L + 1 \cdot L - FC \to \max$
$\frac{20}{\sqrt{L}} = 4$ (по сути издержки фирмы на одного работника теперь не 5, а 4), откуда $L = 25$.

(г) **(3б)** При введении меры (ii) фирма будет решать задачу $\pi(L) = (20+s)2\sqrt{L} - 5L \to \max$, откуда $\frac{20+s}{\sqrt{L}} = 5$. Чтобы обе политики имели одинаковый эффект, фирме в случае (ii) должно быть выгодно нанять ровно 25 работников. Значит, $\frac{20+s}{\sqrt{25}} = 5$, откуда $s = 5$.

(д) **(2б)** В случае (i) расходы фирмы на субсидию составят $1 \cdot 25 = 25$ д.е.
В случае (ii) расходы фирмы на субсидию составят $sQ = 5 \cdot 2\sqrt{25} = 50$ д.е. Таким образом, вторая мера обойдется государству вдвое дороже, чем первая.

Ответ:
(а) $L = 16$, $Q = 8$, $\pi = 80$; (в) $L = 25$; (г) $s = 5$; (д) Первая мера потребует меньших расходов на субсидию.

Примечание: в каждом из пунктов задачи можно было найти точку максимума функции прибыли и без использования производной, просто заметив, что в каждом случае функция прибыли является параболой с ветвями вниз относительно $t = \sqrt{L}$.

Критерии оценивания:
Приведены в тексте решения.