<u>10 класс</u>

1. Условие. Спутник, движущийся по круговой экваториальной орбите в направлении вращения планеты, проходит над станцией слежения 5 раз в звездные сутки. Над станцией слежения проходит также спутник, движущийся по круговой полярной орбите такого же радиуса, что и орбита первого спутника. Как часто он проходит над этой станцией? Форма планеты – сферическая, действием на спутники всех других тел, кроме этой планеты, пренебречь.

1. Решение. Обозначим звездные сутки как T_{E}. Синодический период обращения спутника составляет $S = T_{\mathrm{E}} / 5$. Из уравнения синодического движения можем вычислить период обращения спутника:

$$\frac{1}{S} = \frac{1}{T} - \frac{1}{T_E},$$

$$\frac{1}{T} = \frac{1}{S} + \frac{1}{T_E} = \frac{T_E + S}{T_E S},$$

$$T = \frac{T_\mathrm{E} S}{T_\mathrm{E} + S} = \frac{1}{6} T_\mathrm{E}.$$

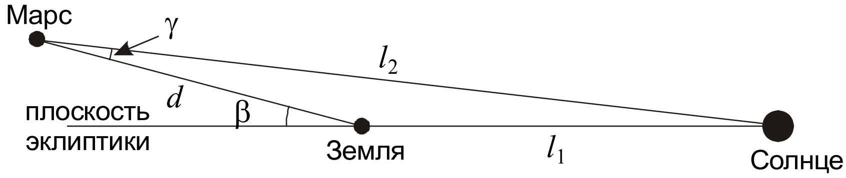
Этот период будет одинаковым для обоих спутников, поскольку радиус орбит у них совпадает. Полярный спутник может пройти над станцией слежения только тогда, когда он пересекает плоскость экватора. Причем это может произойти только в два момента звездных суток, когда сама станция слежения проходит через плоскость полярной орбиты спутника.

Известно, что в некоторый момент времени полярный спутник проходил над станцией слежения. Через половину звездных суток станция слежения вновь пройдет в плоскости орбиты полярного спутника, но с противоположной стороны. За это же время спутник совершит три полных оборота и окажется в «начальной» точке, не над текущим положением станции слежения. Вообще, поскольку период спутника в четное число раз меньше периода обращения планеты, он не сможет пройти над станцией слежения в точке, противоположной начальной. Через звездные сутки после начального момента спутник совершит точно 6 оборотов и вновь окажется в исходной позиции над станцией. Значит, он будет проходить над станцией 1 раз в звездные сутки.

1. Рекомендации для жюри. Для решения задания участники олимпиады должны определить орбитальный период обоих спутников. Эта часть решения оценивается в 4 балла. Правильный вывод о частоте пролета спутника на полярной орбите над станцией слежения оценивается еще в 4 балла.

2. Условие. 4 марта 2012 года наступит противостояние Марса, при котором он будет располагаться на небе в 4.6° севернее эклиптики и иметь угловой диаметр 13.9″. Каким будет угловое расстояние между Солнцем и Землей при наблюдении с Марса в этот день?

2. Решение. Марс находится в противостоянии с Солнцем, следовательно, он проходит через плоскость, перпендикулярную эклиптике и содержащую Солнце и Землю. Изобразим все три тела в данной плоскости:



Зная угловой диаметр Марса δ, можно найти расстояние между Землей и Марсом:

$$d = D / \delta.$$

Здесь D – диаметр Марса. Расстояние получается равным 0.67 а.е. Обозначим угловое расстояние между Марсом и линией эклиптики на небе Земли как β. Расстояние между Солнцем и Марсом l_2, строго говоря, вычисляется по теореме косинусов

$$l_2^2 = l_1^2 + d^2 + 2 l_1 d \cos\beta,$$

но с учетом малости угла β и близости его косинуса к единице:

$$l_2 = l_1 + d = 1.67 \text{ а.е.}$$

Здесь l_1 – радиус орбиты Земли, которую можно считать круговой. Искомое угловое расстояние между Солнцем и Землей на небе Марса вычисляется из теоремы синусов:

$$\sin\gamma = \sin\beta\ (l_1/l_2).$$

Угол γ составляет 2.8°.

2. Рекомендации для жюри. Для решения задачи участники олимпиады должны правильно представлять конфигурацию Солнца, Земли и Марса в указанную дату (лучше всего – изобразить ее на рисунке). Выполнение этой части задания оценивается в 3 балла. Вычисление расстояния между Землей и Марсом, исходя из значения видимого диаметра Марса, оценивается в 2 балла. Если вместо этого расстояния используется средняя величина для противостояний Марса (0.52 а.е.), указанные 2 балла не выставляются.

Решение треугольника «Солнце-Земля-Марс» может быть выполнено разными способами: двукратным применением теоремы косинусов, последовательным применением теорем косинусов и синусов, а также упрощенно, используя малость углов β и γ. Каждый из этих способов считается верным, и его правильное выполнение оценивается в 3 балла.

3. Условие. В октябре 2007 года комета Холмса с ядром радиусом 3.3 км, имеющая блеск около 16^m, в результате взрыва резко разгорелась до 2^m. Считая, что при взрыве все ядро распалось на одинаковые осколки, определите радиус этих осколков. Вклад частиц вне ядра в яркость кометы до вспышки не учитывать.

3. Решение. Обозначим через R первоначальный радиус кометы, а через r – радиус осколков. Пусть m_0 и m – звездные величины до и после взрыва. Изначальная яркость кометы пропорциональна видимой площади ее поверхности:

$$J_0 = C\,\pi\,R^2.$$

Здесь C – некая постоянная величина. Объем ядра кометы составлял

$$V = 4/3\;\pi\,R^3.$$

После взрыва комета распалась на N осколков с радиусом r и объемом V/N:

$$V/N = 4/3\;\pi\,r^3.$$

Отсюда получаем:

$$r/R = (1/N)^{1/3}.$$

Яркость кометы вновь пропорциональна видимой суммарной площади осколков с той же постоянной, так как взрыв кометы произошел быстро, и она фактически осталась в той же точке пространства:

$$J = N\,C\,\pi\,r^2 = J_0\,N^{1/3}.$$

Из последних двух уравнений с учетом формулы Погсона имеем:

$$\frac{r}{R} = \frac{J_0}{J} = 10^{0.4\,(m-m_0)} = 2.5\cdot 10^{-6}.$$

Характерный радиус осколков ядра кометы составляет 8 мм.

3. Рекомендации для жюри. Основой решения задачи является понимание, что яркость кометного ядра при его фиксированном положении относительно Солнца и Земли пропорциональна его видимой площади. Этот вывод оценивается в 2 балла. Правильное выражение для соотношения радиусов кометы и ее осколков оценивается еще в 2 балла. Следующие 2 балла выставляются за получение соотношения яркостей кометы и ее осколков в зависимости от их числа. Последние 2 балла ставятся за окончательное вычисление радиуса осколков. Следует принять во внимание, что участники олимпиады могут изменить структуру решения, выполняя его этапы в иной последовательности, что не может считаться недостатком решения.

4. Условие. Два космических аппарата улетают от Земли в противоположных направлениях с одинаковыми скоростями относительно Земли. На одном из них расположен источник излучения, а на втором приемник. Приемник фиксирует то, что излучение до него доходит на другой длине волны. Изменение длины волны $\Delta\lambda$ составляет 0.1 от самой длины волны λ. Найдите скорости аппаратов относительно Земли.

4. Решение. Изменение длины волны достаточно большое, но все же заметно меньше самой длины волны. Поэтому мы можем использовать классические формулы для эффекта Доплера, считая скорости существенно меньшими скорости света. Скорость удаления аппарата с приемником от аппарата с источником равна

$$u = c\ \Delta\lambda / \lambda.$$

Так как скорости аппаратов относительно Земли равны и направлены в противоположные стороны, их величины составляют

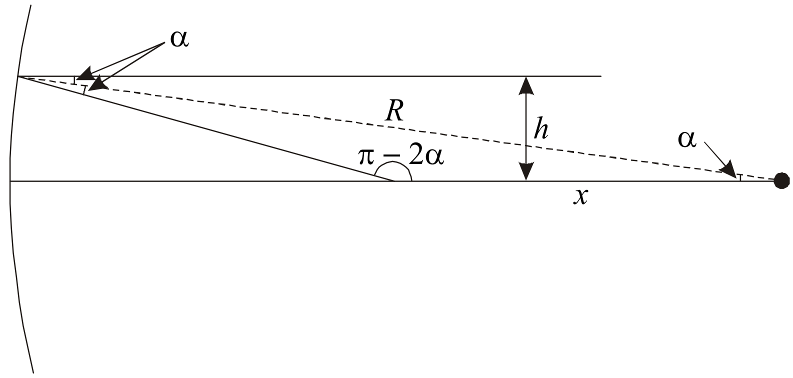
$$v = u/2 = c\ \Delta\lambda / 2\ \lambda = 15\ 000 \text{ км/с}.$$

4. Рекомендации для жюри. Для решения задачи участники олимпиады должны установить связь наблюдаемого изменения длины волны с относительной скоростью аппаратов (6 баллов) и связь с этой скорости с геоцентрическими скоростями аппаратов (2 балла). При этом школьники могут пользоваться релятивистским выражением для эффекта Доплера, что не может считаться ошибкой при условии правильных вычислений.

5. Условие. Световой пучок падает вдоль оптической оси на сферическое зеркало диаметром d с радиусом кривизны R. Определите расстояние фокуса зеркала от центра кривизны, если $d << R$.

5. Решение. Рассмотрим луч, идущий вдоль оптической оси на расстоянии h от нее. Этот луч отразившись от зеркала пересечет оптическую ось на искомом расстоянии x от центра кривизны. Пусть угол отражения равен α. Тогда

$$\sin\alpha = h/R.$$



Обратим внимание, что угол между оптической осью зеркала и радиусом в точке касания также равен α. Воспользуемся теоремой синусов:

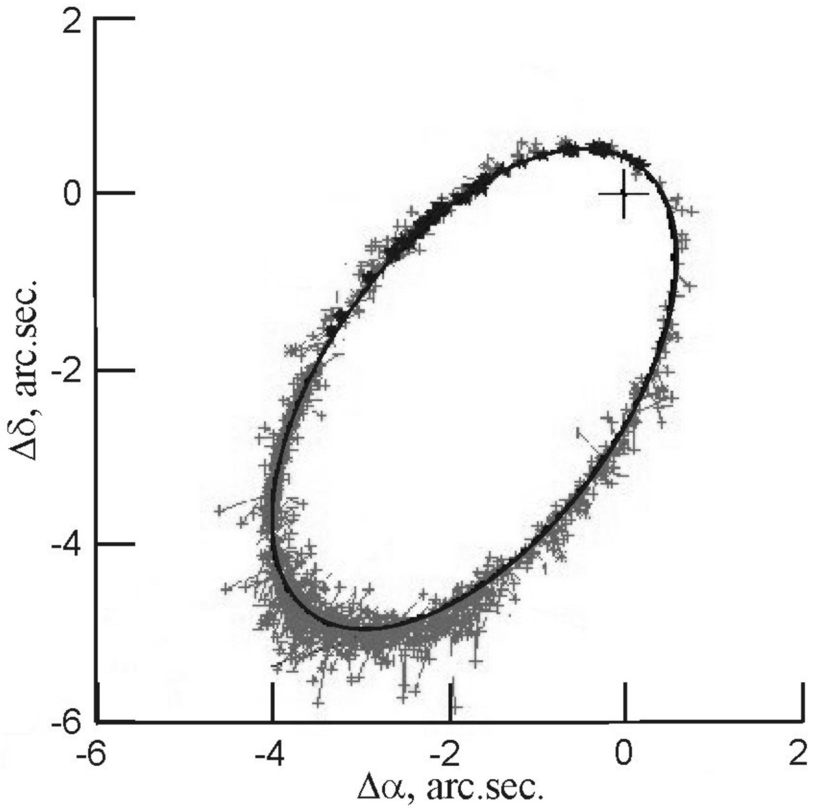
$$\frac{x}{\sin\alpha} = \frac{R}{\sin(\pi - 2\alpha)},$$

$$x = R\frac{\sin\alpha}{\sin 2\alpha} = \frac{R}{2\cos\alpha} = \frac{R}{2}\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}.$$

Таким образом, если диаметр зеркала много меньше, чем его радиус кривизны, то синус будет равен нулю, вторая дробь обратится в единицу, и лучи, параллельные оптической оси, будут собираться на расстоянии $R/2$ от центра кривизны зеркала.

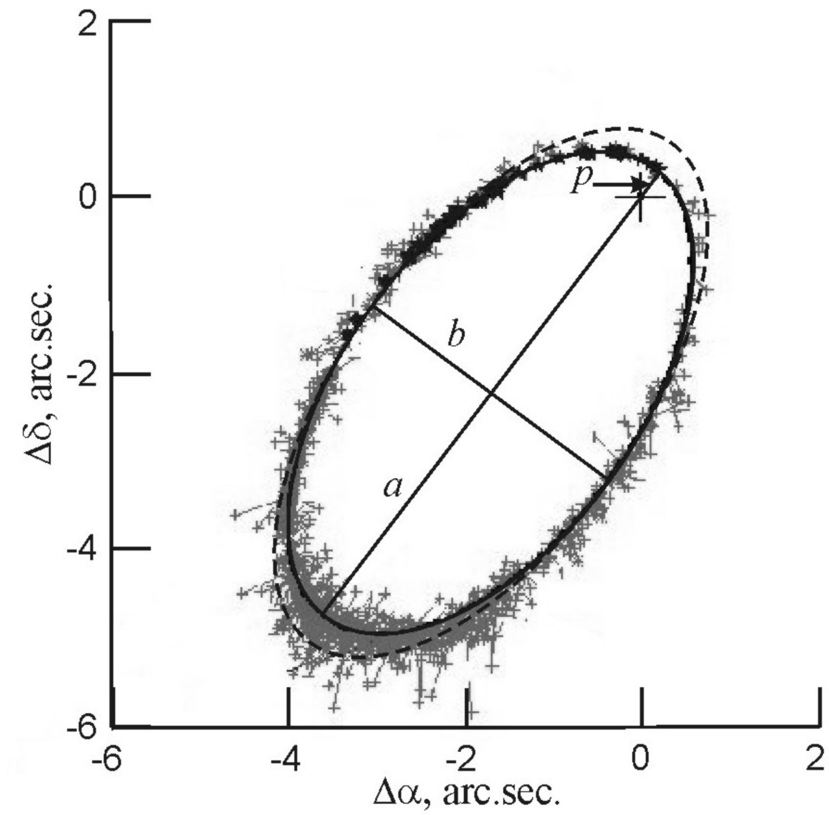
5. Рекомендации для жюри. Основой решения задачи является правильное построение пути луча, идущего на некотором расстоянии от оптической оси и отраженного сферическим зеркалом. Этот этап оценивается в 3 балла. Дальнейшие вычисления и получение ответа оценивается в 5 баллов. Участники олимпиады могут выполнять его как с помощью теоремы синусов, так и с приближением малых углов на всех этапах решения, что также считается правильным.

6. Условие. Двойная звезда Поррима (γ Девы) состоит из двух одинаковых компонент. На рисунке приведены измеренные положения одной из звезд (маленькие крестики) относительно другой, которая считалась неподвижной и помечена большим крестом. Измерения производились в течение орбитального периода (169 лет). Усредненные положения показаны в виде линии эллипса. Считая, что малая ось орбит звезд в пространстве лежит в плоскости рисунка, найдите наклон самой плоскости орбит к плоскости рисунка.



6. Решение. На рисунке показан видимый путь одной звезды относительно другой. В реальности обе звезды движутся вокруг центра масс по орбитам одинаковой формы в одной плоскости, одновременно проходя перицентр. При этом эксцентриситет каждой из орбит будет равен эксцентриситету эллипса, который одна звезда описывает вокруг другой. Поэтому мы можем рассматривать данный эллипс в задаче и считать одну из звезд неподвижной.

Из рисунка, данного в условии задачи, мы можем определить три параметра: видимую большую полуось эллипса a – 3.12″, видимую малую полуось эллипса b – 1.65″, видимое перицентрическое расстояние p – 0.36″.

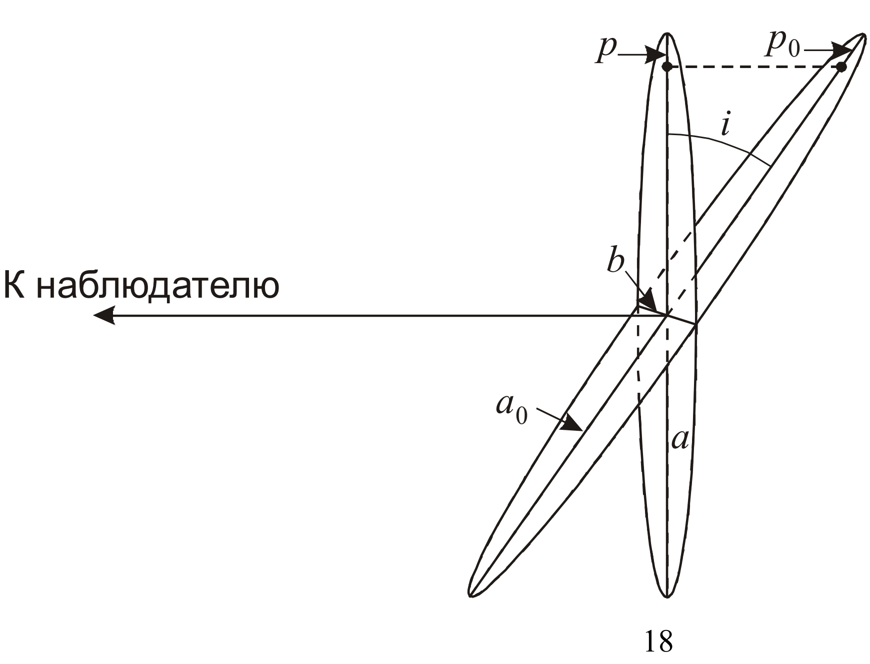


По условию задачи, малая ось орбит звезд лежит в плоскости наблюдения (перпендикулярна направлению на наблюдателя), и ее видимые размеры соответствуют пространственным. Большая ось эллипса образует с картинной плоскостью угол i, и ее видимые размеры уменьшаются из-за эффекта проекции:

$$a = a_0 \cos i.$$

То же самое относится и к перицентрическому расстоянию:

$$p = p_0 \cos i.$$



Отсюда мы можем определить эксцентриситет орбит звезд:

$$e = \frac{a_0 - p_0}{a_0} = \frac{a - p}{a} = 0.88.$$

С другой стороны, большая полуось эллипса выражается из малой с помощью формулы:

$$a_0 = \frac{b}{\sqrt{1 - e^2}}.$$

Отсюда мы получаем искомый угол наклона:

$$i = \arccos\frac{a}{a_0} = \arccos\frac{a\sqrt{1 - e^2}}{b} = 26^{\circ}.$$

Если бы орбиты компонент Порримы лежали в плоскости неба, видимая траектория одной звезды относительно другой представляла бы более вытянутый эллипс, показанный на рисунке пунктирной линией. В реальности, линия узлов орбит спутников несколько отличается от малой оси, и наклон орбит звезд γ Девы к плоскости неба немного превышает полученное значение.

6. Рекомендации для жюри. Перед решением задачи участники олимпиады должны указать, что эллипс, который описывает одна звезда относительно второй, подобен эллипсам, которые обе звезды в реальности описывают при движении вокруг общего центра масс. Данный вывод оценивается в 1 балл. Правильные измерения параметров эллипса, полученного в результате наблюдений, оцениваются еще в 2 балла, при этом сами параметры могут отличаться (в пределах нескольких процентов) от указанных выше. Вычисление истинного эксцентриситета орбит звезд (исходя из перицентрического расстояния) оценивается в 2 балла, вычисление большой полуоси из малой – еще в 2 балла. Наконец, еще 1 балл выставляется за окончательное вычисление угла наклона плоскости орбит звезд к картинной плоскости. Участники олимпиады могут вычислить вместо него угол наклона плоскости орбит звезд к лучу зрения – дополнение искомого угла до прямого (64°), что не может быть основанием для снижения оценки.