

## 11 класс

## Первый день

- 11.1. Существует ли такое вещественное  $\alpha$ , что число  $\cos \alpha$  иррационально, а все числа  $\cos 2\alpha$ ,  $\cos 3\alpha$ ,  $\cos 4\alpha$ ,  $\cos 5\alpha$  рациональны?
- 11.2. Даны 2011 ненулевых целых чисел. Известно, что сумма любого из них с произведением оставшихся 2010 чисел отрицательна. Докажите, что если произвольным образом разбить все данные числа на две группы и перемножить числа в группах, то сумма двух полученных произведений также будет отрицательной.
- 11.3. На окружности, описанной около прямоугольника  $ABCD$ , выбрана точка  $K$ . Оказалось, что прямая  $CK$  пересекает отрезок  $AD$  в точке  $M$  такой, что  $AM : MD = 2$ . Пусть  $O$  — центр прямоугольника. Докажите, что точка пересечения медиан треугольника  $OKD$  лежит на окружности, описанной около треугольника  $COD$ .
- 11.4. 2011 складов соединены дорогами так, что от любого склада можно проехать к любому другому, возможно, проехав по нескольким дорогам. На складах находится по  $x_1, \dots, x_{2011}$  кг цемента соответственно. За один рейс можно провезти с произвольного склада на другой склад по соединяющей их дороге произвольное количество цемента. В итоге на складах по плану должно оказаться по  $y_1, \dots, y_{2011}$  кг цемента соответственно, причём

$$x_1 + x_2 + \dots + x_{2011} = y_1 + y_2 + \dots + y_{2011}.$$

За какое минимальное количество рейсов можно выполнить план при любых значениях чисел  $x_i$  и  $y_i$  и любой схеме дорог?

## 11 класс

## Первый день

- 11.1. Существует ли такое вещественное  $\alpha$ , что число  $\cos \alpha$  иррационально, а все числа  $\cos 2\alpha$ ,  $\cos 3\alpha$ ,  $\cos 4\alpha$ ,  $\cos 5\alpha$  рациональны?
- 11.2. Даны 2011 ненулевых целых чисел. Известно, что сумма любого из них с произведением оставшихся 2010 чисел отрицательна. Докажите, что если произвольным образом разбить все данные числа на две группы и перемножить числа в группах, то сумма двух полученных произведений также будет отрицательной.
- 11.3. На окружности, описанной около прямоугольника  $ABCD$ , выбрана точка  $K$ . Оказалось, что прямая  $CK$  пересекает отрезок  $AD$  в точке  $M$  такой, что  $AM : MD = 2$ . Пусть  $O$  — центр прямоугольника. Докажите, что точка пересечения медиан треугольника  $OKD$  лежит на окружности, описанной около треугольника  $COD$ .
- 11.4. 2011 складов соединены дорогами так, что от любого склада можно проехать к любому другому, возможно, проехав по нескольким дорогам. На складах находится по  $x_1, \dots, x_{2011}$  кг цемента соответственно. За один рейс можно провезти с произвольного склада на другой склад по соединяющей их дороге произвольное количество цемента. В итоге на складах по плану должно оказаться по  $y_1, \dots, y_{2011}$  кг цемента соответственно, причём

$$x_1 + x_2 + \dots + x_{2011} = y_1 + y_2 + \dots + y_{2011}.$$

За какое минимальное количество рейсов можно выполнить план при любых значениях чисел  $x_i$  и  $y_i$  и любой схеме дорог?