Задачи - 1-ый тур

Задача 1. (25 баллов) Фирма А является единственным потребителем фактора z. Известно, что цена единицы продукции, производимой фирмой А, равна 2, а производственная функция имеет вид $F(z)=12z-0.5z^2$. Фирма В является единственным производителем фактора z, причем совокупные альтернативные издержки найма фактора в количестве z представимы функцией $TC(z)=z^2$. Информация о функциях $F(z)$ и $TC(z)$ известна всем агентам. Каждая фирма стремится максимизировать свою прибыль.

(а) Предположим, что фирма А знает функцию совокупных альтернативных издержкек найма фактора фирмы В. Предположим также, что фирма А выбирает цену единицы данного фактора, а затем фирма В, принимая эту цену как данную, решает, какое количество данного фактора она готова произвести и продать фирме А при этой цене. Найдите цену фактора, максимизирующую прибыль фирмы А, и количество фактора, которое при этой цене продаст фирма В.

(б) Предположим теперь, что фирма В знает производственную функцию фирмы А и выбирает цену фактора, а фирма А, принимая эту цену как данную, решает, сколько фактора купить при этой цене. Найдите цену, максимизирующую прибыль фирмы В и количество фактора, которе фирма А приобретет по этой цене.

(в) Если фирмы А и В объединились, то какое количество фактора будет производить интегрированная фирма? Как соотносится прибыль новой компании с суммарной прибылью фирм в случаях (а) и (б)? Будет ли полученное соотношение прибыли справедливо для любой возрастающей функции альтернативных издержек?

(г) Пусть взаимодействие фирмы А с поставщиком фактора производства z соответствует ситуации, представленной в пункте (а). Однако правительство хочет, чтобы уровень занятости фактора z соответствовал значению, выбираемому интегрированной фирмой, рассмотренной в пункте (в). Можно ли решить поставленную задачу за счет использования потоварного налога или потоварной субсидии с некой фиксированной ставкой. Найдите соответствующую ставку налога/субсидии и укажите, кто должен платить налог (получать субсидию) или покажите, что такого налога (субсидии) не существует.

Решение.

(а) Постановка задачи фирмы В - 3 балла.

Фирма А выбирает цену, принимая во внимание решение фирмы В, т.е. количество, которое фирма В захочет продать при данной цене. Подобная зависимость между ценой и количеством описывается функцией предложения. Найдем функцию предложения фирмы В, решив ее задачу максимизации прибыли:

$$\max_{z\geq 0}\,[wz-TC(z)]=\max_{z\geq 0}[wz-z^2]\ .$$

Решение задачи фирмы В - 1 балл.

Функция достигает максимального значения в вершине параболы, то есть $z=w/2$.

Итак, функция предложения фирмы В имеет вид $z^s(w)=w/2$.

Постановка задачи фирмы А - 3 балла.

Тогда фирма А будет выбирать цену, которая приносит ей максимальную прибыль с учетом данной функции предложения поставщика фактора:

$$\max_{w\geq 0}\,\left(pF\left(z^s(w)\right)-wz^s(w)\right)=\max_{w\geq 0}\,\left(12w-0.25w^2-0.5w^2\right)=\max_{w\geq 0}\,\left(12w-0.75w^2\right).$$

Решение задачи фирмы А. - 1 балл.

Функция достигает максимального значения в вершине параболы, то есть $w=12/1.5=8$.

Подставляя это значение в функцию предложения, находим $z^s(8)=8/2=4$.

(б) Постановка задачи фирмы А - 2 балла.

Фирма В выбирает цену, принимая во внимание решение фирмы А, т.е. количество, которое фирма А захочет купить при данной цене. Подобная зависимость между ценой и количеством описывается *функцией спроса. Найдем функцию спроса фирмы А, решив ее задачу максимизации прибыли:* $\max\limits_{z\ge 0}\ pF(z)-wz$.

Решение задачи фирмы А - 1 балл.

Заметим, что целевая функция представима вогнутой функцией (парабола с ветвями вниз), а потому условие первого порядка будет необходимым и достаточным. Выпишем условие первого порядка

$pF'(z)=w$, *откуда находим* $24-2z=w$ *или* $z^d(w)=12-0.5w$.*Заметим, что полученное условие справедливо при* $w\le 24$. *Если* $w>24$, *то величина спроса на фактор будет равна нулю.*

Постановка задачи фирмы В - 3 балла.

Итак, выбирая цену фактора, фирма В будет решать следующую задачу

$$\max_{w\ge 0}\ \left[wz^d(w)-TC\left(z^d(w)\right)\right]$$

Итак, задача фирмы примет вид $\max\limits_{w\ge 0}\ \left(w(12-0.5w)-(12-0.5w)^2\right)$.

Решение задачи фирмы В. - 1 балл.

Условие первого порядка: $12-w+(12-0.5w)=0$.

Преобразовав, находим $24=1.5w$ *или* $w=24/1.5=16$. *В соответствии с функией спроса на фактор* $z^d(16)=12-0.5\times 16=4$.

(в) Постановка задачи интегрированной фирмы - 1 балл.

Задача интегрированной фирмы примет вид:

$$\max_{z\ge 0}\ \left(pF(z)-TC(z)\right)=\max_{z\ge 0}\ \left(24z-z^2-z^2\right)$$

Решение задачи - 1 балл.

Функция достигает максимального значения в вершине параболы, то есть $z=24/4=6$.
В результате прибыль интегрированной фирмы составит $\pi^c=\left(24z-2z^2\right)=6(24-12)=72$.
Суммарная прибыль двух фирм в случаях (а) и (б) будет одинакова, поскольку совпало равновесное количество фактора $\pi^a=\pi^б=\left(24z-2z^2\right)=4(24-8)=64$, *что меньше прибыли, полученной интегрированной фирмой.*

Обобщение результата - 3 балла.
Данный результат несложно обобщить.
Суммарная прибыль двух фирм: $\left(pF(z)-wz\right)+\left(wz-TC(z)\right)=\left(pF(z)-TC(z)\right)$.
Поскольку интегрированная фирма выбирает уровень занятости фактора, максимизируя это выражение, то она всегда может выбрать уровень занятости фактора, соответствующий выбору в случаях (а) или (б), то есть прибыль интегрированной фирмы всегда не меньше, чем прибыль в случаях (а) и (б).
Более того, интегрированная фирма может (в некоторых случаях) выбрать другой уровень занятости, который приносит более высокую прибыль по сравнению со случаями (а) и (б).

(г) Постановка задачи при наличии субсидии - 2 балла.

Поскольку желаемый уровень занятости превышает фактический (выбираемый в пункте (а)), то для увеличения уровня занятости будем субсидировать использование фактора производства, выплачивая потребителю этого фактора субсидию со ставкой s *за каждую единицу фактора* z. *В итоге задача фирмы А примет вид*

$$\max_{w\ge 0}\ \left(pF\left(z^s(w)\right)-(w-s)z^s(w)\right)=\max_{w\ge 0}\ \left(12w-0.25w^2-0.5w(w-s)\right)=\max_{w\ge 0}\ \left((12+0.5s)w-0.75w^2\right).$$

Решение задачи - 1 балл.

Функция достигает максимального значения в вершине параболы, то есть $w=(12+0.5s)/1.5=8+s/3$.

Подставляя в функцию предложения, находим $z^s(8+s/3)=4+s/6=6$ *при* $s=12$.

Результат об инвариантности получателя субсидии - 2 балла.

Заметим, что не имеет значения, будет ли данную субсидию получать покупатель или поставщик фактора производства. Обоснование.

Задача 2. (20 баллов) Рассмотрите совершенно конкурентную отрасль, где все фирмы максимизируют прибыль и обладают одинаковыми технологиями производства. Известно, что средние издержки каждой фирмы не зависят от объема производимой продукции и равны 16. Функция спроса на продукцию отрасли имеет вид $Q^d(p)=\begin{cases} 20-p, & p\le 20 \\ 0, & p>20 \end{cases}$.

В этой экономике временной горизонт жизни каждой фирмы составляет два периода, а ставка процента равна 20%. В настоящее время в отрасли работают 50 фирм.

Одна из действующих фирм может в первом периоде инвестировать сумму F в научно-исследоватетельские разработки, что позволит снизить издержки производства каждой единицы продукции вдвое. Считайте, что новая технология появляется в том же периоде, когда были осуществлены инвестиции. Однако в экономике не развита система защиты авторских прав, и потому во втором периоде все фирмы получат доступ к новой технологии, причем абсолютно бесплатно.

(а) Будет ли фирма в данных условиях инвестировать в новую технологию при $F=62$?

(б) Как бы изменился ваш ответ на пункт (а), если бы фирма-инноватор получила патент на свое изобретение и оставалась бы единственным пользователем данной технологии и во втором периоде? Считайте, что получение патента не сопряжено ни с какими дополнительными издержками.

(в) Пусть в отрасли вместо совершенной конкуренции имеет место сговор, т.е. все пятьдесят фирм выбирают выпуск сообща, руководствуясь критерием максимизации их совокупной прибыли, причем подобное поведение фирм имеет место, как до появления инновационной технологии, так и после ее появления. Выгодно ли в этих условиях фирмам принять совместное решение об инвестициях в создание новой технологии?

Решение.

(а) Анализ равновесия в отрасли до внедрения инноваций - 4 балла.

До внедрения новой технологии все фирмы были в одинаковом положении и продавали продукцию по цене, равной предельным издержкам производства. При этом прибыль каждой фирмы равнялась нулю, так как предельные издержки были равны средним издержкам, т.е. рыночная цена в точности равнялась средним издержкам.

Поиск равновесия после внедрения инноваций:

- **в первом периоде - 3 балла,**

Если фирма инвестирует в инновационную технологию, то она сможет единолично обслуживать весь рыночный спрос, назначив монопольную цену, которая окажется ниже средних издержек производства остальных конкурентов.

Действительно, монопольная цена может быть получена из решения задачи

$$\max_p (p-8)(20-p)=\max_p (p-8)(20-p)=\max_p \left(-p^2+28p-160\right)$$

Итак, $p^M=14<16$. *Объем продаж составит* $Q^M=20-14=6$

Снижение издержек позволит увеличить прибыль в первом периоде на $\Delta\pi=(14-8)\times 6-F-0=36-62=-26$.

- **во втором периоде – 2 балла.**

При этом во втором периоде прибыль вновь будет равна нулю, так как все фирмы смогут использовать более совершенную технологию.

Итоговый вывод – 1 балл.

Таким образом, однопериодный выигрыш не покрывает расходов на инновации, а потому при данных условиях нет смысла инвестировать в исследования и разработки.

(б) Анализ изменения прибыли после внедрения инноваций - 3 балла.

Если фирма получит патент, то ее приведенная величина прибыли изменится на $\Delta\pi_1+\dfrac{\Delta\pi_2}{1+0.2}=-26+\dfrac{36}{1.2}=4>0$.

Итоговый вывод – 1 балл.

В этом случае фирме стоит инвестировать.

(в) Анализ равновесия в отрасли до внедрения инноваций - 2 балла.

Если в отрасли имел место сговор, то до получения патента прибыль в каждом периоде составляла $\max\limits_p (p-16)(20-p) = \max\limits_p (-p^2+36p-320)$, *откуда* $p=18$ *и* $\pi_i = (18-16)(20-18) = 4$.

Поиск равновесия после внедрения инновации – 3 балла:

В результате внедрения инновационной технологии прирост прибыли составит $\Delta\pi_1 + \dfrac{\Delta\pi_2}{1+0.2} = (36-62-4) + \dfrac{(36-4)}{1.2} = \dfrac{32-30\times 1.2}{1.2} = -1/3 < 0$.

Итоговый вывод – 1 балл.

Таким образом, в случае сговора инвестиции в инновации оказываются убыточны.

3. (20 баллов) В стране ТУТ население умеет производить лишь два товара, X и Y. При этом единственным фактором производства является труд. Запас труда (измеряемый в человеко-часах) экономики равен 75. Технология производства товара X задается функцией $Q_X = (L_X/10)^2$, где L_X -количество человеко-часов, используемых в производстве товара X, а Q_X - объем выпуска товара X. Технология производства товара Y задается функцией $Q_Y = L_Y$.

(а) Найдите уравнение, задающее кривую производственных возможностей (КПВ) страны ТУТ, и изобразите КПВ графически.

(б) Если население страны ТУТ предпочитает потреблять товары X и Y в пропорции один к одному и при это стремится максимизировать потребление подобных наборов, то какое количество каждого товара будет произведено в стране, если она не поддерживает торговые связи с другими государствами. Проиллюстрируйте решение на графике.

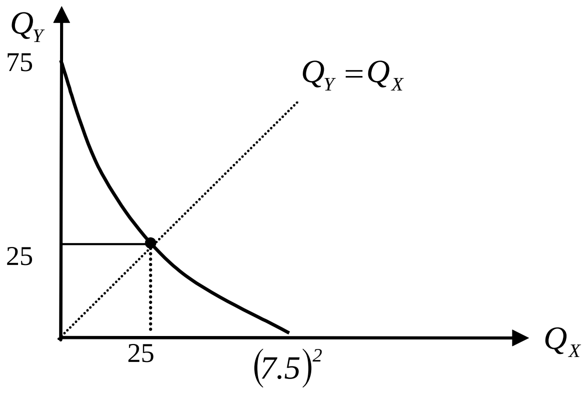
(в) Соседняя страна ТАМ обладает другой технологией производства товара X вида $Q_X = 2L_X$ и готова поделиться своим ноу-хау со страной ТУТ при условии, что работники страны ТУТ отработают 36 человеко-часов на предприятиях страны ТАМ. Найдите и изобразите КПВ страны ТУТ с учетом новых возможностей. Как изменится потребление страны ТУТ?

Решение.

(а) Уравнение КПВ – 3 балла.

Уравнение КПВ. Поскольку $L_X = 10\sqrt{Q_X}$ *и* $L_Y = Q_Y$, *а совокупный запас труда в экономике равен 75, то* $10\sqrt{Q_X} + Q_Y = 75$. *Таким образом,* $Q_Y = 75 - 10\sqrt{Q_X}$. *Заметим, что полученная функция является убывающей и строго выпуклой.*

График – 3 балла.



(б) Расчет объемов потребления – 3 балла.

Если население стремится максимизировать количество наборов, включающих по единице каждого товара, то $Q_X = Q_Y$ *и, подставляя в уравнение КПВ, находим* $Q_Y = 75 - 10\sqrt{Q_Y}$. *Решим полученное уравнение, обозначив* $\sqrt{Q_Y} = a$,

$a^2 + 10a - 75 = 0$, *откуда* $a = -5 + \sqrt{25+75} = 5$. *Таким образом,* $Q_X = Q_Y = 25$.

Иллюстрация на графике – 1 балл.
(в) КПВ страны ТУТ с учетом новых возможностей – 6 баллов.
Поскольку стране ТУТ доступна как ее собственная технология производства, так и альтернативная, то ее множество производственных возможностей будет объединением множеств, полученных при использовании своей и чужой технологии.

При использовании технологии страны ТАМ имеем $0.5Q_X + Q_Y = 75 - 36 = 39$, *откуда* $Q_Y = 39 - 0.5Q_X$.

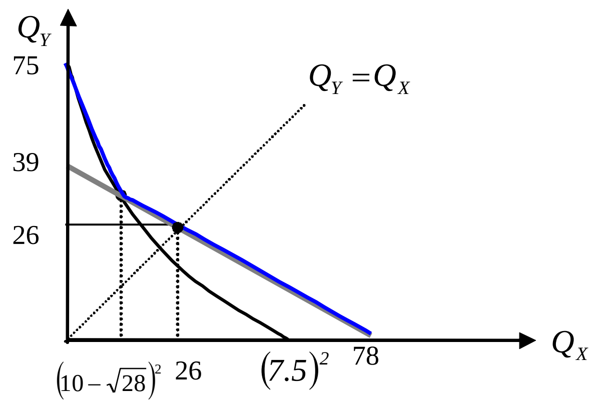
Итак, КПВ описывается условием $Q_Y = max\{39 - 0.5Q_X, 75 - 10\sqrt{Q_X}\}$.

$75 - 10\sqrt{Q_X} - 39 + 0.5Q_X = 36 - 10\sqrt{Q_X} + 0.5Q_X$. *Обозначим* $\sqrt{Q_X} = b$, $36 - 10b + 0.5b^2 = 0$ *при* $b = \left(10 \pm \sqrt{100 - 72}\right) = 10 \pm \sqrt{28}$. *Поскольку* $75 - 10b < 0$ *при* $b > 7.5$, *то нас интересует лишь*

$10 - \sqrt{28}$. *Итак,* $Q_Y = \max\{39 - 0.5Q_X, 75 - 10\sqrt{Q_X}\} = \begin{cases} 75 - 10\sqrt{Q_X}, & Q_X \le \left(10 - \sqrt{28}\right)^2 \\ 39 - 0.5Q_X, & \left(10 - \sqrt{28}\right)^2 < Q_X \le 78 \end{cases}$

(синяя кривая на графике)

График – 3 балла.



Заметим, что $\left(10 - \sqrt{28}\right)^2 < 25 < 26$.

Потребление страны ТУТ – 1 балл.

Находим новую точку потребления как пересечение новой КПВ с прямой $Q_Y = Q_X$.

Итак, $Q_X = 39 - 0.5Q_X$, *откуда* $Q_Y = Q_X = 39/1.5 = 26$, *т.е. потребление каждого товара возрастет на единицу.*

Задача 4. (12 баллов) Правительство страны OZ отчаялось бороться с уклонением от налогов и приняло революционное решение: все налоги отменяются, а госрасходы будут финансироваться исключительно за счет денежной эмиссии. Известно, что функция спроса на деньги (в реальном выражении) в данной экономике имеет вид: $L(\pi) = \begin{cases} 5 - \pi, & \pi \le 5 \\ 0, & \pi > 5 \end{cases}$, где π - темп инфляции, L - деньги в реальном выражении.

Считайте, что в соответствии с количественной теорией денег темп инфляции равен темпу роста денежной массы.

(а) Объясните, почему спрос на деньги может быть описан как убывающая функция темпа инфляции?
(б) При каком темпе инфляции государственные расходы (в реальном выражении) достигнут максимального значения?
Решение.

(а) Объяснение – 5 баллов.
В условиях высокой инфляции деньги теряют свою покупательную способность, а потому индивиды предпочтут переключиться на активы, доходность по которым индексируется в соответствии с темпом инфляции. Фактически темп инфляции является альтернативной стоимостью денег. Рост альтернативной стоимости товара приводит к падению величины спроса.
(б) Постановка задачи – 6 баллов.
Поскольку госрасходы финансируются исключительно за счет прироста денежной массы, то $pG = \Delta M$.

Поделив обе части равенства на M *с учетом того, что* $\pi = \frac{\Delta M}{M}$, *находим* $\frac{G}{M/p} = \frac{\Delta M}{M} = \pi$. *В равновесии спрос на деньги должен быть равен предложению денег, то есть* $M/p = L(\pi)$: $G = \pi \times L(\pi) = 5\pi - \pi^2$.

Решение задачи – 1 балл.

Соответственно, госрасходы достигнут максимального значения при $\pi = 2.5$.

Задача 5. (23 балла) Максимизирующая прибыль авиакомпания обладает монопольным правом на авиаперевозки в определенном направлении и имеет дело с потенциальными потребителями двух типов: бизнесменами и туристами. В рамках маркетингового исследования авиакомпания установила, что бизнесменов среди ее потенциальных клиентов столько же, сколько и туристов и что бизнесмены будут пользоваться ее услугами, если билет стоит не более $700, а туристы – если билет стоит не более $300. Предположим, что издержки перевозки одного пассажира не зависят от количества пассажиров и равны $100.

(а) Пусть авиакомпания вынуждена назначать единую цену за авиабилет (будучи, например, неспособной различать бизнесменов и туристов). Какую цену за авиабилет установит тогда авиакомпания?

(б) Служба маркетинга авиакомпании предложила в дополнении к обычным билетам (с открытой датой вылета) продавать также билеты с фиксированной датой вылета. Билеты с фиксированной датой вылета, по вполне понятным причинам, и бизнесмены, и туристы оценивают ниже, чем билеты с открытой датой. Так, бизнесмены готовы покупать билет с фиксированной датой, если он стоит не выше, чем $250, а туристы – если он стоит не выше чем $200. При этом издержки перевозки одного пассажира для авиакомпании равны $100 вне зависимости от типа билета. Служба маркетинга тем не менее предлагает продавать оба типа билетов по разным ценам, но каждый пассажир будет выбирать тот тип билета, который для него более выгоден. Пусть p_A - цена билета с открытой датой вылета, p_B - цена билета с фиксированной датой вылета. Найдите p_A и p_B, при которых прибыль авиакомпании будет максимальной. Согласится ли менеджмент авиакомпании принять предложение маркетинговой службы?

(в) Выиграют ли потенциальные пассажиры от запрета дискриминации (запрета продавать билеты с фиксированной и открытой датой вылета по разным ценам)?

(г) Предположим, что потенциальными пользователями услуг авиакомпания являются n категорий пассажиров равной численности, причем каждый пассажир категории i $(i=1,2,\ldots,n)$ готов заплатить за авиабилет (с открытой датой) не более чем $\$300+20(i-1)$. Каждый пассажир знает свою категорию (т.е готовность заплатить), а авиакомпания обладает лишь совокупной информацией о категориях клиентов и численности каждой категории, но не умеет различать клиентов из разных категорий. Считайте, что авиакомпания продает только билеты с открытой датой. Какую цену за билет установит авиакомпания?

Решение.

(а) Поиск равновесной цены – 5 баллов.
Авиакомпании невыгодно назначать любую цену выше $700, так как в этом случае никто не будет пользоваться ее услугами.

При цене до $300 ее услугами будут пользоваться все потенциальные клиенты, т.е. при любой цене из этого диапазона издержки одинаковы, а выручка при неизменном объеме продаж растет с увеличением цены. Таким образом, следует рассмотреть максимальную цену из диапазона. При цене в $300 авиакомпания получит в среднем $200 прибыли (300-100=200) с каждого потенциального пассажира. Аналогично при цене свыше $300 и до $700 услугами компании будут пользоваться только бизнесмены, и прибыль растет с повышением цены, т.е. следует рассматривать лишь цену в $700. При такой цене компания получит в среднем $300 прибыли с каждого потенциального пассажира: (700-100)/2=300. Поэтому авиакомпания установит цену в $700 и будет перевозить только бизнесменов.

(б) Расчет цен авиабилетов и сравнительный анализ прибыли авиакомпании при продаже только билетов с открытой датой и при продаже как билетов с открытой датой, так и билетов с фиксированной датой – 7 баллов.
Прибыль авиакомпании может возрасти только, если она будет продавать и билеты с фиксированной датой.

Однако если билеты с открытой датой будут продаваться по цене в $700, а билеты с фиксированной датой по цене в $200, то все пассажиры будут покупать только дешевые билеты. Туристы откажутся от покупки билетов с открытой датой, так как они слишком дороги. Бизнесмены предпочтут билеты с фиксированной датой, так как при этом получат большую чистую выгоду: от покупки билетов с открытой датой бизнесмены ничего не выигрывают, так как покупают их по цене, соответствующей их оценке, а при покупке билетов с фиксированной датой их чистая выгода составляет 250-200=50. В результате средняя прибыль авиакомпании упадет с $300 до $100 .

Если сделать билет с открытой датой дешевле, по крайней мер,е на $50, то бизнесмены будут покупать билеты с открытой датой. Авиакомпания увеличит прибыль с одного проданного билета в среднем на $25 =(100-50)/2.

(в) Анализ последствий запрета для бизнесменов (1 балл), для туристов (1 балл).

Запрет дискриминации не отразится на благосостоянии туристов, так как при дискриминации они покупают билеты по цене, равной их максимальной оценке, а потому имеют нулевую чистую выгоду. Однако запрет дискриминации приведет к ухудшению благосостояния бизнесметов, которые вынуждены будут платить за билет на $50 больше.

(г) Постановка задачи – 4 балла.

Как показано при анализе пункта (а) в каждом диапазоне цен максимизация прибыли достигается при самой высокой цене.

При цене билета, равной $p_i = 300 + 20(i-1)$, *билет будут приобретать только клиенты категорий* $i \le j \le n$. *При этом прибыль авиакомпании составит*

$$\pi(i) = (200 + 20(i-1))(n-i+1) = 20(9+i)(n-i+1) = 20\left(9(n+1) + i(n-8) - i^2\right).$$

Решения задачи без учета проблемы целочисленности – 1 балл.

Эта функция достигает максимума при $i = \dfrac{n-8}{2}$, *возрастает при* $i < \dfrac{n-8}{2}$ *и убывает при* $i > \dfrac{n-8}{2}$.

Поскольку $i \ge 1$, *то при* $n \le 10$ *оптимум достигается при* $i = 1$, *откуда* $p = 300$.

Анализ проблемы целочисленности и итоговый ответ – 4 балла.

При $n > 10$, *если* n *- четно, то оптимальная цена составит* $p = 300 + 20(i-1) = 300 + 10((n-8)-2) = 200 + 10n$.

Если n *- нечетно, то нужно сравнить два варианта* $i_1 = 0.5(n+1) - 4 = 0.5n - 3.5$ *и* $i_2 = 0.5(n-1) - 4 = 0.5n - 4.5$. *Соответственно цены составят* $p_1 = 210 + 10n$ *и* $p_2 = 190 + 10n$, *а прибыль будет равна* $\pi_1 = (110 + 10n)(0.5n + 4.5) = 5(11+n)(n+9)$ *и* $\pi_2 = (90 + 10n)(0.5n + 5.5) = 5(9+n)(n+11) = \pi_1$.

Таким образом, при $n > 10$, *если* n *- нечетно, максимум прибыли достигается при двух вариантах цен:* $p_1 = 210 + 10n$ *и* $p_2 = 190 + 10n$.