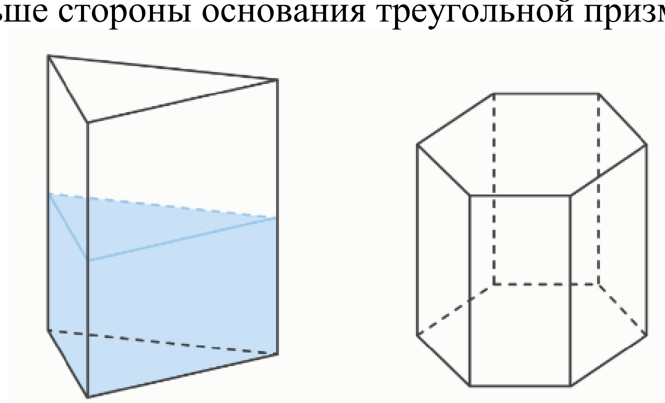
ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
МАТЕМАТИКА. 2023–2024 уч. г.
ШКОЛЬНЫЙ ЭТАП. 11 КЛАСС

ЗАДАНИЯ, ОТВЕТЫ И КРИТЕРИИ ОЦЕНИВАНИЯ

1. Девять действительных a_1, a_2, ..., a_9 образуют арифметическую прогрессию. Известно, что a_9 в 3 раза больше среднего арифметического этих девяти чисел. Найдите a_1, если известно, что $a_4 = 6$.
Ответ: –12.

Решение. Пусть a — первый член прогрессии, а d — её разность, тогда девять членов прогрессии равны $a, a + d, a + 2d, \ldots, a + 8d$. Среднее арифметическое чисел в арифметической прогрессии, состоящей из нечётного числа членов, равно среднему из этих чисел, т. е. в данном случае $a + 4d$.
Получаем уравнение $a + 8d = 3(a + 4d)$, откуда следует $a + 8d = 3a + 12d$ и $a = -2d$. Тогда $6 = a_4 = a + 3d = d$. Значит, $a_1 = -2d = -12$.

2. В сосуде, имеющем форму правильной треугольной призмы, находилась вода, причём её уровень составлял 30 сантиметров. Всю эту воду перелили в пустой сосуд, имеющий форму правильной шестиугольной призмы, сторона основания которой вдвое меньше стороны основания треугольной призмы.



Чему равен уровень воды теперь? Ответ выразите в сантиметрах.
Ответ: 20.

Решение. В обоих случаях часть, занятая водой, имеет форму правильной призмы: в одном случае треугольной, в другой — шестиугольной. Объём правильной призмы, одинаковый в обоих случаях, равен произведению площади основания на высоту. Следовательно, отношение высот призм (отношение уровней воды) обратно отношению площадей их оснований.

Если бы шестиугольная призма имела такую же сторону основания, как и треугольная, её площадь основания была бы в 6 раз больше, т. к. правильный шестиугольник можно разбить на 6 правильных треугольников с такой же стороной. При уменьшении стороны в 2 раза площадь уменьшается в $2^2 = 4$ раза, поэтому площадь основания шестиугольной призмы в $\frac{6}{4} = 1{,}5$ раза больше площади основания треугольной призмы. Но тогда уровень воды в ней в 1,5 раза меньше, т. е. он составляет $30 : 1{,}5 = 20$ сантиметров.

3. Андрей, Борис и Влад зашли в магазин. Андрей купил 1 мороженое, 2 булочки и 3 шоколадки и заплатил за это 235 рублей. Борис купил 3 порции мороженого, 2 булочки и 1 шоколадку и заплатил за это 205 рублей. Сколько рублей должен будет заплатить Влад, если он купит 6 порций мороженого, 5 булочек и 4 шоколадки?
Ответ: 535.

Решение. Если сложить покупки Андрея и Бориса, то мы получим, что 4 порции мороженого, 4 булочки и 4 шоколадки стоят $235 + 205 = 440$ рублей. Отсюда можно понять, что 1 мороженое, 1 булочка и 1 шоколадка стоят суммарно $440 : 4 = 110$ рублей. Если теперь это умножить на 3 и добавить покупку Бориса, то мы как раз получим 6 порций мороженого, 5 булочек и 4 шоколадки. Значит, искомая стоимость равна $110 \cdot 3 + 205 = 535$ рублей.

Замечание. Цену порции мороженого, булочки или шоколадки по отдельности найти невозможно, т. к. эти цены однозначно не определены.

4. Каждая клетка таблицы 11×11 покрашена в один из трёх цветов: красный, синий или зелёный. Известно, что одноцветные клетки не граничат по стороне, а также что красные и синие клетки не граничат по стороне. Сколько зелёных клеток может быть в таблице? Укажите все возможные варианты.
Ответ: 60, 61.

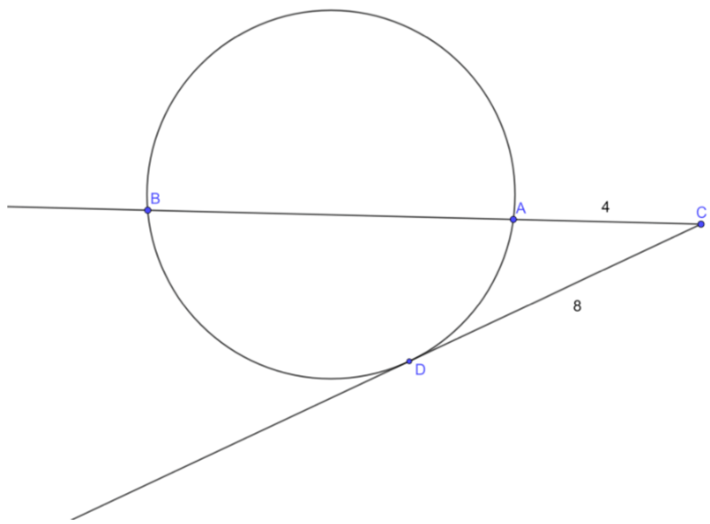
Решение. Заменим синие и красные клетки на фиолетовые, а зелёные оставим зелёными. Заметим, что никакие две фиолетовые клетки не могут стоять рядом, поскольку ни две синих, ни две красных, ни синяя и красная клетки не могут стоять рядом. Мы получили раскраску в 2 цвета (зелёный и фиолетовый), в которой клетки одного цвета не стоят рядом. Но тогда это шахматная раскраска! Шахматных раскрасок существует всего две — в зависимости от того, какого цвета угловые клетки. В одной из них 61 зелёная и 60 фиолетовых клеток, а в другой — 60 зелёных и 61 фиолетовая. При этом понятно, что оба варианта возможны, например, если все фиолетовые клетки до перекраски были синими.

5. Найдите наибольшее натуральное число, которое в 9 раз больше своего остатка от деления на 1024.

Ответ: 8064.

Решение. Обозначим неполное частное от деления исходного числа на 1024 через k, а остаток от деления — через r. Тогда исходное число равно $1024k + r$, а также по условию это равно $9r$. Отсюда получаем $8r = 1024k$, т. е. $r = 128k$. Поскольку r — остаток от деления на 1024, то $r < 1024$.
Наибольшее число, делящееся на 128 и меньшее $1024 = 128 \cdot 8$, равно $128 \cdot 7$. Значит, наибольшее возможное исходное число равно $9r = 9 \cdot 128 \cdot 7 = 8064$ — ясно, что оно подходит под условие задачи.

6. Даны окружность ω радиуса 6 и точка C, лежащая вне её. Из точки C провели касательную, касающуюся ω в точке D, и секущую, пересекающую ω в точках A и B. Оказалось, что $CD = 8$ и $AC = 4$. Найдите площадь треугольника BCD.



Ответ: 38,4.

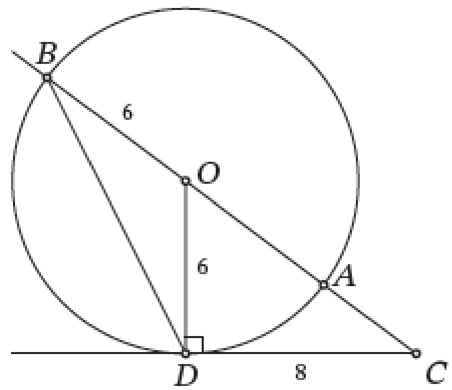
Решение. Как известно, квадрат касательной равен произведению секущей из той же точки на её внешнюю часть: $CD^2 = CA \cdot CB$. Отсюда получаем $64 = 4 \cdot CB$ и $CB = 16$, а также $AB = CB - CA = 16 - 4 = 12$. Поскольку хорда AB окружности ω вдвое длиннее её радиуса, получаем, что AB является диаметром.

Отметим точку O — центр окружности ω (рис. 11). Как мы уже выяснили, AB — диаметр, поэтому O является серединой AB. Значит, $OB = OA = OD = 6$. При этом, поскольку CD — касательная к ω, отрезки OD и CD перпендикулярны. Таким образом, треугольник ODC — прямоугольный с катетами 8 и 6, поэтому его площадь равна $\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 = 24$.

Осталось найти площадь равнобедренного треугольника OBD, боковые стороны которого равны 6. Для этого мы воспользуемся формулой

$S_{OBD} = \frac{1}{2} \cdot OB \cdot OD \cdot \sin \angle BOD$. Поскольку углы BOD и COD являются смежными, их синусы равны. Синус угла COD легко найти из прямоугольного треугольника COD:

$$\sin \angle COD = \frac{CD}{CO} = \frac{CD}{CA + AO} = \frac{8}{4+6} = \frac{4}{5}.$$



Значит, $S_{OBD} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \cdot \frac{4}{5} = 14{,}4$. Суммируя площади треугольников BOD и COD, получаем, что площадь треугольника BCD равна 24 + 14,4 = 38,4.

7. В стране 15 городов. Между каждыми двумя из них либо есть дорога, либо её нет. Оказалось, что для любого города A найдутся такие три города, что они между собой попарно не соединены дорогами, но каждый из них соединён дорогой с A. Какое наибольшее количество дорог может быть в этой стране?
Ответ: 99.

Решение. Рассмотрим произвольный город A. По условию найдутся города B, C, D такие, что они соединены с A, но попарно не соединены между собой. В частности, это означает, что C и D не соединены с B. Теперь рассмотрим город B. Для него тоже должны найтись соответствующие 3 города. Заметим, что это не могут быть города C и D, поскольку они не соединены с B. Значит, должны найтись города K, L и M, попарно не соединённые между собой (среди них, возможно, есть город A). Но тогда в стране нет хотя бы 6 дорог: BC, CD, BD, KL, LM, KM. Всего возможных дорог в стране $\frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 14 = 105$, из которых хотя бы 6 отсутствует. Значит, всего дорог не более $105 - 6 = 99$.

Теперь поймём, что дорог может быть ровно 99. Пронумеруем города числами от 1 до 15. Пусть города 1, 2, 3 попарно не соединены между собой, а также города 4, 5, 6 попарно не соединены между собой, а любые другие пары городов дорогой соединены. Проверим, что условие задачи выполняется. Действительно, если в качестве города A из условия задачи взять город из первой тройки, то для него подходит тройка городов 4, 5, 6. Если же в качестве города A из условия взять город не из первой тройки, то для него подходит тройка городов 1, 2, 3.

8. Три приведённых квадратных трёхчлена имеют одинаковые дискриминанты, большие 0. Все корни этих трёхчленов упорядочили по возрастанию, и получилось 6 различных целых чисел:

$$x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < x_5 < x_6.$$

Известно, что $x_1 = 1$, $x_2 = 11$, $x_3 = 12$, $x_6 = 23$. Найдите x_4 и x_5.
Ответ: $x_4 = 13$, $x_5 = 22$.

Решение. Заметим, что для приведённого квадратного трёхчлена корень из дискриминанта равен разности корней. Это следует из формулы корней квадратного уравнения: действительно, $x_+ - x_- = \frac{1}{2}(-b+\sqrt{D}) - \frac{1}{2}(-b-\sqrt{D}) = \sqrt{D}$. Поскольку дискриминанты трёхчленов из условия задачи одинаковы, то и разности корней у них тоже одинаковы; обозначим эти разности через d.

Без ограничения общности можно считать, что x_1 — корень первого трёхчлена. Предположим, что x_3 — тоже его корень, тогда $d = x_3 - x_1 = 12 - 1 = 11$. Поскольку x_6 — наибольший из корней всех трёхчленов, то второй корень того же трёхчлена должен быть равен $x_6 - d = 23 - 11 = 12 = x_3$. Но по условию все корни различны, противоречие.
Теперь предположим, что второй корень первого трёхчлена — это x_4, x_5 или x_6. Поскольку $x_3 = 12$, а x_4, x_5 и x_6 больше x_3, то $d > 12 - 1 = 11$. Но тогда x_3 не может быть в паре ни с каким другим корнем, поскольку $x_3 - d < 1 = x_1$, а $x_3 + d > 23 = x_6$, противоречие.
Значит, единственный возможный вариант — когда вторым корнем первого трёхчлена является x_2, тогда $d = x_2 - x_1 = 10$. Поскольку x_3 — наименьшее из оставшихся чисел, то второй корень того же трёхчлена больше x_3, а значит, равен $x_3 + d = 12 + 10 = 22$. Тогда у третьего трёхчлена корни x_6 и какой-то меньший, т. е. $x_6 - d = 23 - 10 = 13$. Осталось лишь расположить полученные числа в порядке возрастания: $x_4 = 13$, $x_5 = 22$.