ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
МАТЕМАТИКА. 2023–2024 уч. г.
ШКОЛЬНЫЙ ЭТАП. 10 КЛАСС

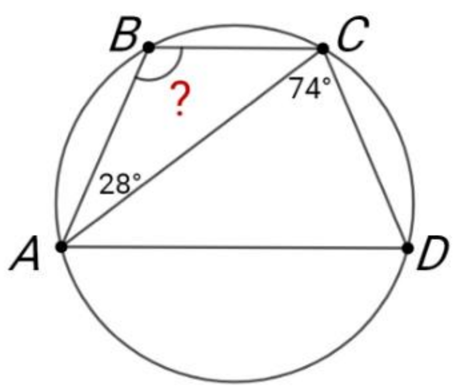
ЗАДАНИЯ, ОТВЕТЫ И КРИТЕРИИ ОЦЕНИВАНИЯ

1. Действительные числа a, b, c, d таковы, что $|a-b| = |b-c| = |c-d| = 5$. Чему может быть равно значение выражения $|a-d|$? Укажите все возможные варианты.
Ответ: 5, 15.

Решение. Отметим на числовой прямой точки a, b, c, d. Поместим кузнечика в точку a.

Поскольку $|a - b| = 5$, то для того, чтобы переместиться из a в b, кузнечику надо сделать прыжок длины 5. Аналогично с перемещениями из b в c и из c в d. Таким образом, чтобы попасть из a в d (переместиться на расстояние $|a - d|$), кузнечику надо сделать 3 прыжка длины 5. Если все они сделаны в одном направлении, то кузнечик суммарно переместится на 15. Если же два из них сделаны в одном направлении, а третий в другом, то кузнечик суммарно переместится на 5. Таким образом, в задаче два ответа: 5 и 15.
Также приведём и явные примеры четвёрок чисел (a, b, c, d), соответствующие ответам 5 и 15: ответу 15 соответствует четвёрка (0, 5, 10, 15), а ответу 5 — четвёрка (0, 5, 10, 5).

2. В окружность вписана трапеция $ABCD$ с основаниями BC и AD. Известно, что $\angle$ BAC = 28° < и $\angle ACD = 74°$. Сколько градусов составляет $\angle ABC$?



Ответ: 113.

Решение. Поскольку $BC \parallel AD$, имеем $\angle BCA = \angle DAC = x$. Поскольку четырёхугольник $ABCD$ вписан, сумма его противоположных углов при вершинах A и C равна 180°. Решая соответствующее уравнение $(x + 28°) + (x + 74°) = 180°$, получаем, что $x = 39°$. Тогда из треугольника ABC находим искомый угол: $\angle ABC = 180° - 28° - 39° = 113°$.

3. На окружности красным цветом записали четыре различных натуральных числа. На дуге между каждыми двумя соседними красными числами записали синим цветом их произведение. Известно, что сумма всех четырёх синих чисел равна 1133. Найдите сумму всех красных чисел.
Ответ: 114.

Решение. Обозначим исходные числа через a, b, c, d в порядке по часовой стрелке. Тогда синим цветом записаны числа ab, bc, cd, da. Сумма этих чисел равна $ab + bc + cd + da = (a + c)(b + d) = 1133$. Заметим, что числа $a + c$ и $b + d$ больше 1, поскольку являются суммой двух натуральных чисел. Но число 1133 единственным образом раскладывается в произведение двух чисел, больших единицы: $1133 = 11\cdot 103$. Значит, $a+c = 11$, $b+d = 103$ или наоборот. В любом случае, $a + b + c + d = 11 + 103 = 114$.

4. Школьники Анна, Богдан, Вероника, Герман и Диана собирали грибы. Известно следующее:

- Всего было собрано 30 грибов;
- Мальчики собрали грибов суммарно столько же, сколько и девочки;
- Богдан собрал грибов больше, чем любые два других школьника вместе взятые;
- Анна собрала грибов столько же, сколько Герман и Диана вместе взятые;
- Кто-то собрал ровно 8 грибов.

Кто сколько грибов собрал?
Ответ: Анна: 4; Богдан: 14; Вероника: 8; Герман: 1; Диана: 3.

Решение. Поскольку мальчики собрали столько же, сколько и девочки, то мальчики суммарно собрали 15 грибов и девочки суммарно собрали 15 грибов. Также из условия следует, что Богдан собрал грибов больше, чем любой из остальных школьников.
Докажем, что Герман собрал меньше всех грибов. Действительно, пусть это не так, и тогда он собрал грибов не меньше, чем какая-то девочка. Но Богдан собрал больше грибов, чем две оставшиеся девочки, поэтому мальчики собрали суммарно больше грибов, чем девочки. Противоречие. Значит, Герман собрал меньше всех грибов. Следовательно, каждая девочка собрала хотя бы один гриб.
Поскольку 3 девочки собрали 15 грибов, какая-то из них собрала не больше 5 грибов. Поэтому две оставшиеся девочки собрали хотя бы 10 грибов, а значит, Богдан собрал хотя бы 11 грибов (а Герман, соответственно, собрал не более 4 грибов). Получается, что 8 грибов собрала одна из девочек. Посмотрим, сколько грибов могли собрать две другие девочки по отдельности (суммарно они собрали

$15 - 8 = 7$ грибов). В каждом из случаев количество грибов Германа должно быть меньше минимального количества грибов у девочек (как мы выяснили ранее, он собрал меньше всех грибов), а также должно быть равно разности каких-то двух из них (разности между Анной и Дианой).

Случай 1. Набор грибов девочек – это $\{1, 6, 8\}$. Для Германа есть единственный вариант, при котором количество его грибов было меньше, чем у всех девочек, — это собрать 0 грибов. Но разности 0 среди чисел девочек нет, поэтому такой случай невозможен.

Случай 2. Набор грибов у девочек – это $\{2, 5, 8\}$. Варианты для Германа: 0 и 1, но они оба не подходят, поскольку соответствующих разностей у девочек нет.

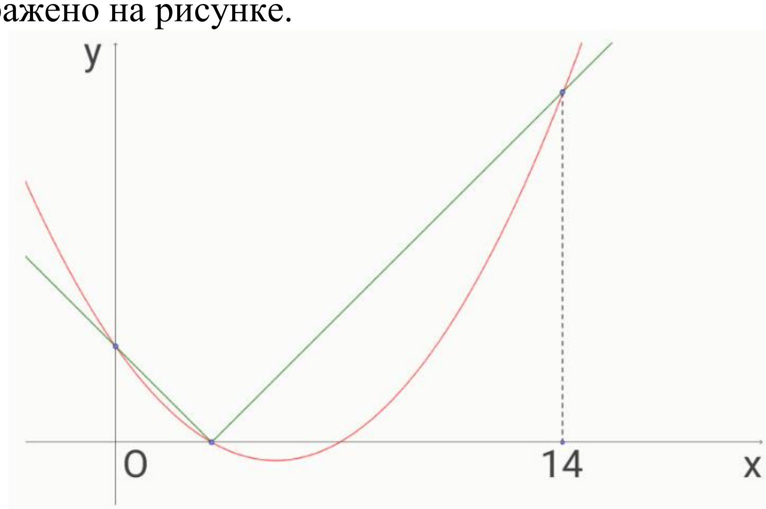
Случай 3. Набор грибов у девочек – это $\{3, 4, 8\}$. Варианты для Германа: 0, 1 и 2. Подходит только вариант 1, потому что разностей 0 и 2 нет. Тогда Анна собрала 4 гриба, Диана 3, Вероника 8, а Богдан $15 - 1 = 14$.

Других случаев нет, так как 7 можно представить в виде суммы двух натуральных чисел только тремя способами (с точностью до перестановки слагаемых). Таким образом, ответ единственный.

5. Петя записал на доску два целых числа. Каждую минуту Вася записывал на доску новое число, равное сумме двух каких-то чисел на доске. Спустя пять минут на доске оказались числа 21, 15, 12, 9, 6, 3,−3.
Выберите все числа, которые гарантированно были записаны Васей:
Ответ: 3; 21.

Решение. Заметим, что число -3 обязательно должно быть записано Петей. Действительно, если это не так, то изначально на доске были 2 положительных числа, но тогда и все последующие числа тоже были положительными, и число -3 не могло оказаться на доске.
Предположим, что второе число Пети — это 3. Тогда после первой минуты будет выписано число $-3 + 3 = 0$, которого нет в итоговом списке. Аналогично, если вторым Петиным числом будет 21, то на доске после первой минуты будет выписано число $21 - 3 = 18$, которого также нет. Значит, 3 и 21 гарантированно выписаны Васей.
Любое из оставшихся чисел может быть выписано Петей. Действительно, вычитая из него несколько раз 3, можно получить числа 6 и 3. Далее получаем те числа, которых не хватает, пользуясь некоторыми из равенств 6+3 = 9, 9+3 = 12, 12+3 = 15, 6+15 = 21.

6. График функции $y = ax^2 + bx + c$ пересекает график функции $y = |x - 3|$ в трёх точках, как изображено на рисунке.



Оказалось, что абсцисса самой правой точки пересечения равна 14. Найдите a.
Ответ: 1/7.

Решение. Поскольку при $x = 0$ значение функции $y = |x - 3|$ равно 3, то и значение квадратного трёхчлена также равно 3. С другой стороны, при $x = 0$ его значение равно c, поэтому $c = 3$. Теперь посмотрим на меньший корень квадратного трёхчлена. Он совпадает с нулём функции $|x - 3|$, но её значение равно нулю только в точке $x = 3$, откуда получаем, что один из корней трёхчлена равен 3. Подставляя в этот трёхчлен $x = 3$, получаем уравнение на коэффициенты a и b:

$$a \cdot 3^2 + b \cdot 3 + 3 = 0.$$

Теперь посмотрим на пересечение квадратного трёхчлена и функции $|x - 3|$. Поскольку в их точке пересечения $x = 14$, модуль раскрывается со знаком «плюс», а значит, $x = 14$ является корнем уравнения $ax^2 + bx + 3 = x - 3$. Подставляя в это уравнение $x = 14$, мы получаем ещё одно уравнение на a и b:

$$a \cdot 14^2 + b \cdot 14 + 3 = 14 - 3.$$

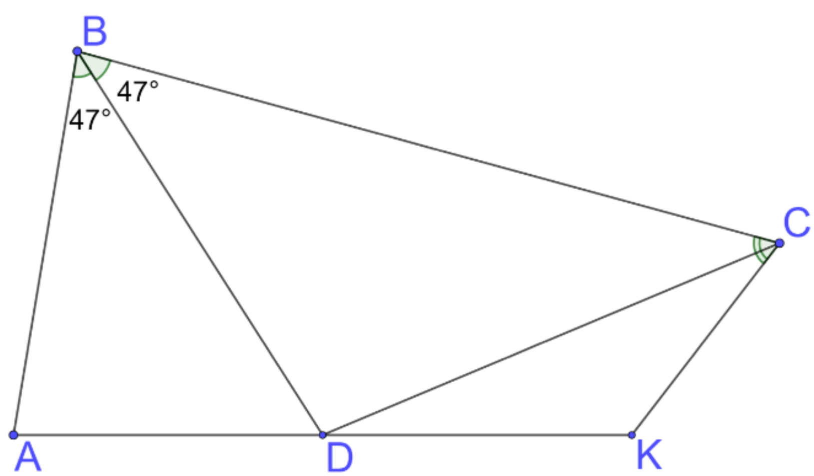
Таким образом, у нас получилась система из двух уравнений с неизвестными a и b:

$$\begin{cases} 196a + 14b - 8 = 0 \\ 9a + 3b + 3 = 0 \end{cases}$$

Умножим первое уравнение на 3, а второе на 14 (чтобы коэффициенты перед b стали одинаковыми), и вычтем из первого второе.

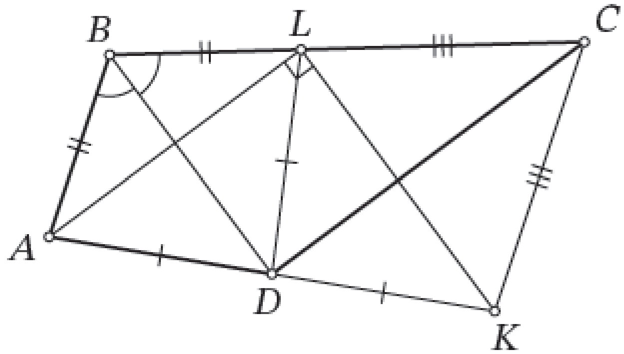
Получим $(196 \cdot 3 - 9 \cdot 14)a + (-8 \cdot 3 - 3 \cdot 14) = 0$, откуда находим $462a - 66 = 0$ и $a = 66/462 = \dfrac{1}{7}$.

7. Выпуклый четырёхугольник $ABCD$ таков, что $\angle ABD = \angle CBD = 47°$. Точка K такова, что точка D является серединой отрезка AK.
Оказалось, что $BC = AB + CK$.



Сколько градусов составляет $\angle BCK$?
Ответ: 86.

Решение. Отметим на BC такую точку L, что $AB = BL$ (рис. 9). По условию $BC = AB + CK$, откуда получаем, что $LC = BC - BL = BC - AB = CK$. Посмотрим теперь на треугольники ABD и LBD. У них есть общая сторона BD, а кроме того, $AB = BL$ и $\angle ABD = \angle LBD$, поэтому эти треугольники равны. Отсюда получаем, что $AD = LD$. Так как D — это середина отрезка AK, то $KD = AD = LD$. Получаем, что в треугольнике ALK медиана LD равна половине стороны, к которой она проведена, поэтому этот треугольник является прямоугольным с прямым углом ALK.



Теперь рассмотрим треугольник ABL. Он равнобедренный ($AB = BL$), поэтому

$$\angle ALB = \frac{180^\circ - \angle ABL}{2} = \frac{180^\circ - 47^\circ - 47^\circ}{2} = 43^\circ$$

Поскольку мы знаем углы BLA и ALK, можно найти угол CLK:

$$\angle CLK = 180^\circ - 43^\circ - 90^\circ = 47^\circ$$

Заметим, что треугольник CLK тоже равнобедренный ($CL = CK$), поэтому

$$\angle BCK = \angle LCK = 180^\circ - 2\angle CLK = 180^\circ - 2 \cdot 47^\circ = 86^\circ$$

Замечание. Из решения также следует, что $AB \parallel CK$.

8. В клетках таблицы 11×11 расставили числа от 1 до 121, каждое по разу. В каждой строке все числа идут по возрастанию слева направо, и в каждом столбце все числа идут по возрастанию сверху вниз. Назовём число *особым*, если оно отличается от каждого своего соседа хотя бы на 2. Какое наибольшее количество *особых* чисел может быть?
Числа являются соседями, если они стоят в соседних по стороне клетках.
Ответ: 117.

Решение. Число 1 меньше всех остальных чисел, поэтому оно должно быть первым в строке и первым в столбце, а значит, оно должно находиться в левом верхнем углу. Значит, число 2 не может быть в левом верхнем углу, поэтому либо оно не в первой строке, либо не в первом столбце. В первом случае оно должно быть больше какого-то числа в его столбце, а во втором случае — какого-то числа в его строке. Но единственное число, которое меньше 2 — это 1, поэтому числа 1 и 2 должны находиться рядом. Тогда никакое из них не может быть особым.

Аналогичными рассуждениями легко получить, что число 121 должно находиться в правом нижнем углу, а число 120 должно быть рядом с ним, поэтому эти числа также не могут быть особыми. Значит, особых чисел не более $121 - 4 = 117$.

1	2	4	7	…						
3	5	8	…							
6	9	…								
10	…									
…										
										…
									…	112
								…	113	116
							…	114	117	119
						…	115	118	120	121

Приведём пример, когда особых чисел ровно 117. Для этого будем расставлять числа по диагоналям, направленным «влево-вниз», как показано на рис. Несложно понять, что особыми будут все числа, кроме 1, 2, 120, 121.