Материалы для проведения регионального этапа

50-й ВСЕРОССИЙСКОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ

2023–2024 учебный год

Второй день

31 января – 1 февраля 2024 г.

Москва, 2024

Сборник содержит материалы для проведения III этапа 50-й Всероссийской олимпиады школьников по математике. Задания подготовлены Центральной предметно-методической комиссией по математике Всероссийской олимпиады школьников.

Сборник составили: Н. Х. Агаханов, С. Л. Берлов, И. И. Богданов, П. А. Кожевников, А. С. Кузнецов, Е. Г. Молчанов, О. К. Подлипский, К. А. Сухов, А. И. Храбров, Д. Г. Храмцов.

А также: М. А. Дидин, В. Б. Мокин, П. Ю. Козлов, А. Д. Терёшин, Д. А. Терёшин, Г. Р. Челноков, Л. М. Шатунов.

В скобках после каждой задачи указана фамилия её автора.

Рецензент: д.ф.-м.н. Р. Н. Карасёв.

Компьютерный макет: И. И. Богданов, А. И. Голованов.

Введение

Порядок проведения, методика и система оценивания (проверки) регионального этапа Всероссийской олимпиады школьников по математике 2023–2024 учебного года.

Региональный этап Всероссийской олимпиады школьников по математике 2023–2024 учебного года проводится по заданиям, подготовленным Центральной предметно-методической комиссией, в единые для всех субъектов РФ сроки: **31 января 2024 г.** (I тур) и **1 февраля 2024 г.** (II тур). Региональный этап проводится по отдельным заданиям для учащихся 9, 10 и 11 классов.

Задания для каждого класса включают 10 задач — по 5 задач в каждом из двух дней (туров) Олимпиады (задачи 1–5 — I тур, задачи 6–10 — II тур). Продолжительность каждого тура для каждого класса составляет 3 часа 55 минут.

В силу того, что во всех субъектах Российской Федерации региональный этап проводится по одним и тем же заданиям, подготовленным Центральной предметно-методической комиссией, в целях предотвращения преждевременного доступа к текстам заданий со стороны участников Олимпиады, а также их учителей и наставников, время начала и окончания туров в установленные даты в каждом субъекте РФ должно определяться в соответствии с **«Временны́ми регламентами проведения туров регионального этапа Всероссийской олимпиады школьников в субъектах Российской Федерации в 2023–2024 учебном году»** для часовых поясов.

Разбор задач в субъектах Российской Федерации, где тур оканчивается в 16.00 и 17.00 по местному времени, проводится не раньше, чем на следующий день после проведения второго тура Олимпиады.

Решение каждой задачи оценивается целым числом баллов от 0 до 7. Максимальное количество баллов, которое может получить участник, равно 70 (35 — I тур, 35 — II тур).

Задания математических олимпиад являются творческими, допускают несколько различных вариантов решений. Кроме того, необходимо оценивать частичные продвижения в задачах (например, разбор важного случая, доказательство вспомогательного утверждения, нахождение примера и т. п.). Наконец, возможны логические и арифметические ошибки в решениях. Окончательные баллы по задаче должны учитывать всё вышеперечисленное.

Проверка работ осуществляется в соответствии со следующими правилами:

а) любое правильное решение оценивается в 7 баллов. Недопустимо снятие баллов за то, что решение слишком длинное, или за то, что решение школьника отличается от приведённого в методических разработках;

б) недопустимо снятие баллов в работе за неаккуратность записи решений;

в) баллы не выставляются «за старание Участника», в том числе за запись в работе большого по объёму текста, не содержащего продвижений в решении задачи;

г) черновики не проверяются.

В связи с необходимостью качественной оценки работ участников, на их проверку выделяется до 7 дней.

Для единообразия оценки работ участников олимпиады из разных регионов и с целью исключения при этом ошибок, Центральная предметно-методическая комиссия имеет право перепроверки работ участников регионального этапа.

В случае отсутствия специальных критериев по задаче, её решение оценивается по приведённой ниже таблице (отметим, что для исключения различий в оценке близких продвижений по задаче в работах разных участников, таблица упрощена по сравнению с приведённой в Требованиях по проведению регионального этапа).

Баллы	**Правильность (ошибочность) решения**
7	Полное верное решение.
5–7	Верное решение. Имеются недочёты, в целом не влияющие на решение.
1–4	Задача не решена, но в работе имеются существенные продвижения.
0	Аналитическое решение (координатным, векторным, тригонометрическим методом) геометрической задачи, не доведённое до конца.
0	Рассмотрение частного случая, не дающее продвижений в решении в общем случае.
0	Верное решение отсутствует, существенных продвижений нет.

Ниже приведены ответы и решения к задачам олимпиады. В комментариях к задачам указаны критерии оценивания (в баллах) некоторых предполагаемых ошибок и частичных продвижений. Заметим, что работа участника, помимо приведённых, может включать другие содержательные продвижения и ошибки, которые должны быть оценены дополнительно.

Желаем успешной работы!

Авторы и составители сборника

Условия и решения задач

9 класс

9.6. На доске записано 7 различных чисел, сумма которых равна 10. Петя умножил каждое из них на сумму остальных шести и записал 7 полученных произведений в тетрадь. Оказалось, что в тетради встречаются только четыре различных числа. Найдите одно из чисел, записанных на доске. (*И. Богданов*)

Ответ. -20.

Решение. Для каждого числа x, написанного на доске, произведение x и суммы шести оставшихся равно $f(x) = x(10-x) = 10x - x^2$. Квадратичная функция $f(x)$ принимает все значения, кроме максимального, два раза — а именно, в точках a и $10 - a$. Значит, если $f(a) = f(b)$ при $a \neq b$, то $a + b = 10$.

Таким образом, каждое число встречается в тетради не более двух раз. Значит, так как в тетради всего четыре различных числа, три из них встречаются по два раза, и ещё одно — один раз. Таким образом, шесть из семи чисел на доске разбиваются на пары так, что сумма чисел каждой пары равна 10. Значит, сумма этих шести чисел равна 30, тогда седьмое число равно $10 - 30 = -20$.

Замечание 1. На доске могли быть выписаны любые семь чисел вида $-20, a, 10 - a, b, 10 - b, c, 10 - c$ (если все эти семь чисел различны). Значит, ни одно число с доски, кроме -20, определить невозможно.

Замечание 2. Можно провести и прямое рассуждение, без ссылок на свойства квадратичной функции. Например, если $f(a) = f(b)$, то $0 = (10a - a^2) - (10b - b^2) = (a - b)(10 - a - b)$, поэтому либо $a = b$, либо $a + b = 10$.

Комментарий. Доказано только, что в тетради три числа встречаются по два раза, а четвёртое — один раз — 2 балла.

9.7. На окружности длиной 1 метр отмечена точка. Из неё в одну и ту же сторону одновременно побежали два таракана с различными постоянными скоростями. Каждый раз, когда быстрый таракан догонял медленного, медленный мгновенно разворачивался, не меняя скорости. Каждый раз, когда они встречались лицом к лицу, быстрый мгновенно разворачивался, не меняя скорости. На каком расстоянии от отмеченной точки могла произойти их сотая встреча? (*И. Богданов*)

Ответ. На нулевом.

Первое решение. Назовём быстрого и медленного таракана B и M соответственно. Если таракан бежит в том же направлении, что и в момент старта, то будем говорить, что он бежит *вперёд*, в противном случае будем говорить, что он бежит *назад*.

До первой встречи оба таракана бегут вперёд, между первой и второй встречами B бежит вперёд, а M — назад. Между второй и третьей встречами оба таракана бегут назад, а между третьей и четвёртой встречами B бежит назад, а M — вперёд. Наконец, на четвёртой встрече B разворачивается, и они оба снова начинают бег вперёд.

Будем следить за перемещением M. Если между двумя встречами тараканы бегут в противоположные стороны, между такими встречаем всегда проходит одно и то же время, а значит, M всегда пробегает одно и то же расстояние. Таким образом, между первой и второй встречами, а также между третьей и четвертой встречами M пробегает одно и то же расстояние в противоположных направлениях. Аналогично, когда между двумя встречами тараканы бегут в одном направлении, это тоже всегда занимает одинаковое время, и M пробегает одно и то же расстояние. Таким образом, до первой встречи, а также между второй и третьей встречами M также пробегает одно и то же расстояние в противоположных направлениях. Стало быть, в момент четвертой встречи M (а значит, и B) будет в точке старта.

Далее эта ситуация будет повторяться каждые 4 встречи. Следовательно, в точке старта тараканы будут и в момент сотой встречи.

Второе решение. Обозначим тараканов так же, как и выше; пусть их скорости равны $b > m$ м/с. Для определенности будем считать, что изначально тараканы бегут по часовой стрелке, и расстояние будем отмерять именно в этом направлении.

Когда тараканы бегут в одну сторону, скорость удаления B

от M равна $b-m$, поэтому до первой встречи они будут бежать $\frac{1}{b-m}$ секунд, и M до встречи пробежит $\frac{m}{b-m}$ метров. Дальше тараканы будут двигаться навстречу друг другу со скоростью сближения $b+m$, поэтому до второй встречи они будут бежать $\frac{1}{b+m}$ секунд, и до этой встречи M сместится от точки старта на $\frac{m}{b-m}-\frac{m}{b+m}=\frac{2m^2}{b^2-m^2}$ метров.

Дальше оба таракана будут бежать против часовой стрелки в течении $\frac{1}{b-m}$ секунд, поэтому общее смещение M от точки старта будет равно $\frac{2m^2}{b^2-m^2}-\frac{m}{b-m}=-\frac{m}{b+m}$ (т.е. в итоге он сместится на расстояние $\frac{m}{b+m}$ против часовой стрелки). Наконец, после этого M развернётся, и они будут бежать в противоположных направлениях $\frac{1}{b+m}$ секунд. Следовательно, их четвёртая встреча произойдёт на расстоянии $-\frac{m}{b+m}+\frac{m}{b+m}=0$ от точки старта.

Таким образом, в четвёртый раз они обязательно встречаются в точке старта и после встречи снова побегут по часовой стрелке. Но тогда их сотая встреча также произойдет в точке старта.

Комментарий. При рассуждениях как во втором решении участники могут рассуждать не в терминах перемещения M, а в терминах «расстояния от точки старта». Формально эти рассуждения могут быть не совсем верны, ибо тараканы до встречи могут пробежать несколько кругов. Однако предлагается в случаях, когда решение в остальном верно, за это баллов не снижать.

9.8. На стороне BC остроугольного треугольника ABC выбраны точки P и Q так, что $BP=PQ=QC$. Точки X и Y выбраны соответственно на отрезках AC и AB так, что $PX\perp AC$ и $QY\perp AB$. Докажите, что точка пересечения медиан треугольника ABC равноудалена от прямых XQ и YP. (*А. Матвеев*)

Решение. Пусть M — середина BC (тогда M — ещё и середина PQ); пусть G — точка пересечения медиан треугольника ABC.

По свойству медианы имеем $MG:GA=1:2$. А так как

$MP : PB = 1 : 2$, получаем, что $PG \parallel BA$. Тогда $\angle YPG = \angle PYB$ и $\angle QPG = \angle PBY$. Но YP — медиана прямоугольного треугольника BYQ, поэтому $\angle PYB = \angle PBY$. Значит, $\angle YPG = \angle QPG$, т. е. PG — биссектриса угла QPY. Поэтому точка G равноудалена от прямых PQ и PY.

Аналогично показывается, что QG — биссектриса угла PQX, и потому точка G равноудалена от PQ и QX. Значит, она равноудалена от трёх прямых YP, PQ и XQ. Этим завершается решение.

Замечание. В ситуации, описанной в условии (когда треугольник ABC остроугольный), получается, что G — центр вневписанной окружности треугольника PQR, где R — точка пересечения прямых XQ и YP.

Комментарий. Показано, что $PG \parallel AB$ — 2 балла.

За получение различных соотношений между отрезками, углами и т. п., без дальнейшего их применения баллы не добавляются.

Из факта о том, что PQ и QG — биссектрисы углов QPY и PQX, делается вывод, что G — центр вневписанной окружности треугольника PQR (без обоснования, почему эта окружность вневписанная, а не вписанная) — баллы не снимаются.

9.9. Правильный треугольник T со стороной 111 разбит прямыми, параллельными его сторонам, на правильные треугольники со стороной 1. Все вершины этих треугольников, кроме центра треугольника T, отмечены. Назовём множество из нескольких отмеченных точек *линейным*, если все эти точки лежат на одной прямой, параллельной стороне T. Сколько существует способов разбить все отмеченные точки на 111 линейных множеств? (Способы, отличающиеся порядком множеств, считаются одинаковыми.) (*И. Богданов*)

Ответ. $2^{3\cdot 37^2} = 2^{4107}$.

Решение. Рассмотрим равносторонний треугольник со стороной k, разобьём его на правильные треугольнички со стороной 1 и отметим все вершины этих треугольничков; полученную конструкцию назовём *k-треугольником.* В дальнейшем под *прямыми* мы всегда будем понимать прямые, параллельные сторонам этого треугольника и проходящие через хотя бы одну отмеченную точку.

Лемма. *Пусть A — отмеченная точка в k-треугольнике. Тогда существует единственный способ провести k прямых так, что все отмеченные точки, кроме, возможно, A, покрыты этими прямыми. А именно, для каждой стороны k-треугольника надо провести все прямые, параллельные ей и лежащие между этой стороной и точкой A (включая саму сторону, но исключая прямую, содержащую A, см. рис. 1).*

Доказательство. Индукция по k. База при $k = 1$ проверяется легко: надо провести прямую, содержащую две оставшихся точки, кроме A.

Для перехода рассмотрим сторону k-треугольника, на которой не лежит A. Если прямая, содержащая эту сторону, не проведена, то все $k+1$ отмеченных точек на этой прямой должны быть покрыты различными прямыми; это невозможно, так как прямых k. Значит, эта прямая проведена. Выкинув её и точки k-треугольника, лежащие на ней, получаем $(k-1)$-треугольник, в котором проведено $k-1$ прямых с теми же условиями. Осталось применить предположение индукции. □

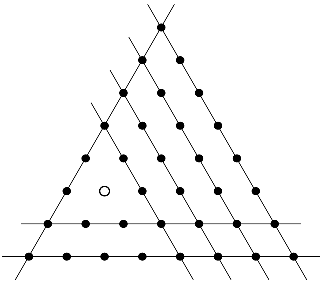

Рис. 1

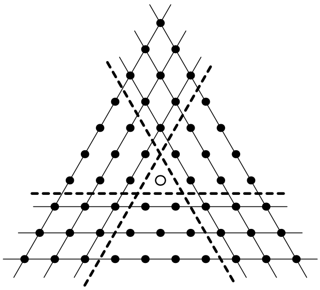

Рис. 2

Перейдём к задаче. Рассмотрим одно из разбиений на линейные множества. Для каждого множества проведём прямую, его содержащую. Тогда эти прямые покрыли все отмеченные точки 111-треугольника, кроме, возможно, его центра A. Значит, эти прямые устроены так, как описано в лемме, и для любого разбиения этот набор прямых один и тот же.

Заметим, что наш 111-треугольник разбился на 6 областей:

три «ромба» в углах, состоящих из точек, покрытых нашими прямыми дважды, и три «трапеции» у сторон, в которых каждая точка покрыты одной прямой (см. рис. 2). Тогда каждая точка в «трапеции» относится к множеству, лежащему на этой прямой; каждую же точку в «ромбе» можно отнести к любому из двух множеств, лежащих на проходящих через неё прямых. Все такие выборы можно сделать независимо друг от друга. Поскольку в каждом из трёх «ромбов» всего 37^2 точек, получаем, что требуемых разбиений ровно $2^{3\cdot 37^2}$.

Замечание. Вариант доказательства леммы можно получить, показав сначала, что такое покрытие невозможно осуществить при помощи менее, чем k прямых.

Комментарий. Доказано только, что все точки, кроме одной, нельзя покрыть менее чем 111 прямыми — 1 балл.

Доказана только лемма, а подсчёт проведён неверно — 4 балла.

Лемма используется без доказательства — не более 3 баллов.

Во в целом верном подсчёте допущена ошибка на ± 1 (например, утверждается, что в ромбах по 36^2 или по 38^2 точек) — снимается 1 балл.

9.10. Существует ли натуральное число $n > 10^{100}$ такое, что десятичные записи чисел n^2 и $(n+1)^2$ отличаются перестановкой цифр? (Иначе говоря, в десятичных записях чисел n^2 и $(n+1)^2$ должно быть поровну цифр 0, поровну цифр 1, …, поровну цифр 9.)

(*А. Чиронов*)

Ответ. Да.

Первое решение. Заметим, что числа $13^2 = 169$ и $14^2 = 196$ получаются друг из друга перестановкой цифр.

Пусть теперь $a = \frac{1}{2}(13 \cdot 1000 + 14) = 6507$. Положим $n = 10^{100} \cdot a + 13$. Заметим тогда, что

$$n^2 = 10^{200} \cdot a^2 + 10^{100} \cdot (1000 \cdot 13^2 + 14 \cdot 13) + 13^2,$$

$$(n+1)^2 = 10^{200} \cdot a^2 + 10^{100} \cdot (1000 \cdot 13 \cdot 14 + 14^2) + 14^2.$$

Иначе говоря, десятичная запись числа n^2 состоит из блоков a^2, $182 = 14 \cdot 13$ и $169 = 13^2$ (дважды), разделённых нулями; у числа же $(n+1)^2$ эти блоки суть a^2, $182 = 13 \cdot 14$ и $196 = 14^2$ (дважды). Поскольку количества разделяющих нулей в обоих случаях одинаковы, получаем, что число n удовлетворяет требованиям.

Замечание. Подобная же конструкция сработает, если вместо 13 и 14 взять произвольные числа k и $k+1$, квадраты которых отличаются друг от друга перестановкой цифр, а вместо a выбрать такое число t, для которого числа $2tk$ и $2t(k+1)$ также отличаются друг от друга перестановкой цифр. Существуют и другие способы подобрать такие числа k и t.

Второе решение. Предположим, что нам удалось найти такое число b (возможно, с ведущим нулём), что набор цифр в десятичной записи числа $2b$ отличается от набора цифр в десятичной записи числа b выкидыванием цифры 4 и добавлением цифры 1 (иначе говоря, если к числу b приписать единицу, а к $2b$ — четвёрку, то полученные числа отличаются перестановкой цифр). Тогда в качестве числа n можно выбрать $n = 5 \cdot 10^d \cdot b + 1$ (где $d > 100$, и $d - 1$ больше количества цифр в числе $2b$). Действительно, имеем

$$n^2 = 1 + 10^{d+1} \cdot b + 10^{2d} \cdot 25b^2,$$
$$(n+1)^2 = 4 + 10^{d+1} \cdot 2b + 10^{2d} \cdot 25b^2,$$

и мы опять видим, что эти числа состоят из блоков $(1, b, 25b^2)$ и $(4, 2b, 25b^2)$, разделённых нулями, а блоки получаются друг из друга перестановкой цифр.

Осталось найти такое число b. Если, например, потребовать, чтобы запись числа $2b$ получалась из записи числа b циклическим сдвигом и заменой 4 на 1, то такое число нетрудно найти, выписывая его цифры с конца. Подойдёт, например. число $b = 0526315789473684$; тогда $2b = 1052631578947368$.

Замечание. Это решение, разумеется, также допускает вариации.