Материалы для проведения регионального этапа

50-й ВСЕРОССИЙСКОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ

2023–2024 учебный год

Второй день

31 января – 1 февраля 2024 г.

Москва, 2024

Сборник содержит материалы для проведения III этапа 50-й Всероссийской олимпиады школьников по математике. Задания подготовлены Центральной предметно-методической комиссией по математике Всероссийской олимпиады школьников.

Сборник составили: Н. Х. Агаханов, С. Л. Берлов, И. И. Богданов, П. А. Кожевников, А. С. Кузнецов, Е. Г. Молчанов, О. К. Подлипский, К. А. Сухов, А. И. Храбров, Д. Г. Храмцов.

А также: М. А. Дидин, В. Б. Мокин, П. Ю. Козлов, А. Д. Терёшин, Д. А. Терёшин, Г. Р. Челноков, Л. М. Шатунов.

В скобках после каждой задачи указана фамилия её автора.

Рецензент: д.ф.-м.н. Р. Н. Карасёв.

Компьютерный макет: И. И. Богданов, А. И. Голованов.

Введение

Порядок проведения, методика и система оценивания (проверки) регионального этапа Всероссийской олимпиады школьников по математике 2023–2024 учебного года.

Региональный этап Всероссийской олимпиады школьников по математике 2023–2024 учебного года проводится по заданиям, подготовленным Центральной предметно-методической комиссией, в единые для всех субъектов РФ сроки: **31 января 2024 г.** (I тур) и **1 февраля 2024 г.** (II тур). Региональный этап проводится по отдельным заданиям для учащихся 9, 10 и 11 классов.

Задания для каждого класса включают 10 задач — по 5 задач в каждом из двух дней (туров) Олимпиады (задачи 1–5 — I тур, задачи 6–10 — II тур). Продолжительность каждого тура для каждого класса составляет 3 часа 55 минут.

В силу того, что во всех субъектах Российской Федерации региональный этап проводится по одним и тем же заданиям, подготовленным Центральной предметно-методической комиссией, в целях предотвращения преждевременного доступа к текстам заданий со стороны участников Олимпиады, а также их учителей и наставников, время начала и окончания туров в установленные даты в каждом субъекте РФ должно определяться в соответствии с **«Временны́ми регламентами проведения туров регионального этапа Всероссийской олимпиады школьников в субъектах Российской Федерации в 2023–2024 учебном году»** для часовых поясов.

Разбор задач в субъектах Российской Федерации, где тур оканчивается в 16.00 и 17.00 по местному времени, проводится не раньше, чем на следующий день после проведения второго тура Олимпиады.

Решение каждой задачи оценивается целым числом баллов от 0 до 7. Максимальное количество баллов, которое может получить участник, равно 70 (35 — I тур, 35 — II тур).

Задания математических олимпиад являются творческими, допускают несколько различных вариантов решений. Кроме того, необходимо оценивать частичные продвижения в задачах (например, разбор важного случая, доказательство вспомогательного утверждения, нахождение примера и т. п.). Наконец, возможны логические и арифметические ошибки в решениях. Окончательные баллы по задаче должны учитывать всё вышеперечисленное.

Проверка работ осуществляется в соответствии со следующими правилами:

а) любое правильное решение оценивается в 7 баллов. Недопустимо снятие баллов за то, что решение слишком длинное, или за то, что решение школьника отличается от приведённого в методических разработках;

б) недопустимо снятие баллов в работе за неаккуратность записи решений;

в) баллы не выставляются «за старание Участника», в том числе за запись в работе большого по объёму текста, не содержащего продвижений в решении задачи;

г) черновики не проверяются.

В связи с необходимостью качественной оценки работ участников, на их проверку выделяется до 7 дней.

Для единообразия оценки работ участников олимпиады из разных регионов и с целью исключения при этом ошибок, Центральная предметно-методическая комиссия имеет право перепроверки работ участников регионального этапа.

В случае отсутствия специальных критериев по задаче, её решение оценивается по приведённой ниже таблице (отметим, что для исключения различий в оценке близких продвижений по задаче в работах разных участников, таблица упрощена по сравнению с приведённой в Требованиях по проведению регионального этапа).

Баллы	**Правильность (ошибочность) решения**
7	Полное верное решение.
5–7	Верное решение. Имеются недочёты, в целом не влияющие на решение.
1–4	Задача не решена, но в работе имеются существенные продвижения.
0	Аналитическое решение (координатным, векторным, тригонометрическим методом) геометрической задачи, не доведённое до конца.
0	Рассмотрение частного случая, не дающее продвижений в решении в общем случае.
0	Верное решение отсутствует, существенных продвижений нет.

Ниже приведены ответы и решения к задачам олимпиады. В комментариях к задачам указаны критерии оценивания (в баллах) некоторых предполагаемых ошибок и частичных продвижений. Заметим, что работа участника, помимо приведённых, может включать другие содержательные продвижения и ошибки, которые должны быть оценены дополнительно.

Желаем успешной работы!

Авторы и составители сборника

11 класс

11.6. У учителя есть 100 гирь массами 1 г, 2 г, …, 100 г. Он хочет раздать Пете и Васе по 30 гирь так, чтобы выполнялось следующее условие: никакие 11 Петиных гирь не уравновешиваются никакими 12 Васиными гирями, а также никакие 11 Васиных гирь не уравновешиваются никакими 12 Петиными гирями. Сможет ли учитель это сделать? (*О. Подлипский*)

Ответ. Сможет.

Первое решение. Выберем 30 гирь с массами вида $3k+1$ г и дадим Пете, а Васе дадим 30 гирь с массами вида $3k+2$ г. Тогда масса любых 12 гирь, взятых у одного человека, будет делиться на 3, а масса любых 11 гирь, взятых у одного человека, не будет делиться на 3.

Второе решение. Выберем 30 гирь с массами $1, 2, 3, \ldots 30$ г и дадим Пете, а Васе дадим 30 гирь с массами $71, 72, 73, \ldots 100$ г. Тогда у Пети масса любых 11 или 12 гирь будет меньше $30 \cdot 12 = 360$ г. А масса любых 11 или 12 гирь у Васи будет больше $70 \cdot 11 = 770$ г.

Комментарий. Верный ответ без объяснения — 0 баллов.

Приведен пример верного разбиения на две группы по 30 гирь, но не объяснено, почему пример подходит (или объяснено только для одного из двух случаев) — 4 балла.

Приведен пример, который не работает хотя бы для одного выбора наборов гирь — 0 баллов.

11.7. График G_1 квадратного трехчлена $y = px^2 + qx + r$ с вещественными коэффициентами пересекает график G_2 квадратного трехчлена $y = x^2$ в точках A и B. Касательные в точках A и B к графику G_2 пересекаются в точке C. Оказалось, что точка C лежит на графике G_1. Найдите все возможные значения p.

(*А. Терёшин*)

Ответ. 2.

Первое решение. Касательная в точке $A(x_a; x_a^2)$ к графику G_2 имеет уравнение

$$y = f'(x_a)(x - x_a) + x_a^2 = 2x_a(x - x_a) + x_a^2 = 2x_a x - x_a^2.$$

Аналогично уравнение касательной в точке $B(x_b; x_b^2)$ есть $y = 2x_b x - x_b^2$, откуда точка пересечения C имеет координаты

$\left(\dfrac{x_a+x_b}{2};x_ax_b\right)$. Три точки A, B и C принадлежат графику квадратного трёхчлена px^2+qx+r, поэтому

$$\begin{cases} px_a^2+qx_a+r=x_a^2,\\ px_b^2+qx_b+r=x_b^2,\\ p\cdot\left(\dfrac{x_a+x_b}{2}\right)^2+q\,\dfrac{x_a+x_b}{2}+r=x_ax_b. \end{cases}$$

Сложим первые два равенства и вычтем удвоенное третье, получим

$$p\cdot\left(x_a^2+x_b^2-\frac{x_a^2}{2}-x_ax_b-\frac{x_a^2}{2}\right)+q\cdot(x_a+x_b-x_a-x_b)+2r-2r=$$
$$=x_a^2+x_b^2-2x_ax_b,$$
$$p\cdot\left(\frac{x_a^2}{2}-x_ax_b+\frac{x_a^2}{2}\right)=x_a^2+x_b^2-2x_ax_b,$$
$$\frac{p(x_a-x_b)^2}{2}=(x_a-x_b)^2.$$

Так как $x_a\neq x_b$, получаем, что $p=2$.

Второе решение. Вычтем из обоих трёхчленов линейную функцию, график которой проходит через точки A и B. Обозначим полученные трёхчлены соответственно $P(x)$ и $Q(x)$ (где у $P(x)$ старший коэффициент равен p, а у $Q(x)$ он равен 1). Пусть абсциссы точек A и B равны соответственно x_a и x_b. Тогда $P(x_a)=P(x_b)=Q(x_a)=Q(x_b)=0$, и касательные в точках $(x_a,0)$ и $(x_b,0)$ к графику трёхчлена $Q(x)$ пересекаются на графике $P(x)$. В самом деле, вычитание линейной функции сохраняет условия касания прямой и параболы в точке с заданной абсциссой, а также пересечения двух прямых и параболы в одной точке.

Обозначим $(x_a+x_b)/2$ через x_m. Поскольку $Q(x_a)=Q(x_b)=$ $=0$, график трёхчлена $Q(x)$ симметричен относительно прямой $x=x_m$, поэтому касательные к этому графику в точках $(x_a,0)$ и $(x_b,0)$ пересекаются на оси симметрии. Пусть также точка пересечения касательных имеет координаты (x_m,y_c), а вершина параболы-графика $Q(x)$ имеет координаты (x_m,y_d).

Поскольку старший коэффициент трёхчлена $Q(x)$ равен 1, имеет место равенство $0-y_d=(x_b-x_m)^2$, или $y_d=-(x_a-x_b)^2/4$, поскольку график $Q(x)$ есть парабола $y = x^2$, перенесённая параллельно так, чтобы вершина попала в (x_m, y_d). По этой же причине угловые коэффициенты касательных в точках $(x_a, 0)$ и $(x_b, 0)$ есть $\pm(x_a - x_b)$; значит, $y_c = -(x_a - x_b)^2/2$. Таким образом, если перенести параболы-графики $P(x)$ и $Q(x)$ так, чтобы их вершины попали в $(0, 0)$, то ординаты точек с абсциссой $x = x_m$ на этих параболах будут соответственно $-y_c$ и $-y_d = -y_c/2$, из чего следует, что старший коэффициент у $P(x)$ в 2 раза больше, чем у $Q(x)$.

Замечание. Используя интерполяционный многочлен Лагранжа, можно получить, что

$$p = \frac{x_a^2}{(x_a - x_b)\left(x_a - \dfrac{x_a + x_b}{2}\right)} +$$

$$+ \frac{x_b^2}{(x_b - x_a)\left(x_b - \dfrac{x_a + x_b}{2}\right)} + \frac{x_a x_b}{\left(\dfrac{x_a + x_b}{2} - x_a\right)\left(\dfrac{x_a + x_b}{2} - x_b\right)} =$$

$$= 2 \cdot \frac{x_a^2 + x_b^2 - 2x_a x_b}{(x_a - x_b)^2} = 2.$$

Комментарий. Верный ответ без обоснования — 0 баллов.

Приведение примера трехчлена с $p = 2$ не требуется.

Найдены координаты точки C — 1 балл.

11.8. В пространстве расположены отрезки AA_1, BB_1 и CC_1 с общей серединой M. Оказалось, что сфера ω, описанная около тетраэдра $MA_1B_1C_1$, касается плоскости ABC в точке D. Точка O — центр окружности, описанной около треугольника ABC. Докажите, что $MO = MD$. (*А. Кузнецов*)

Решение. Обозначим через O_1 центр окружности, описанной около треугольника $A_1B_1C_1$, через P — центр сферы ω (см. рис. 5). При центральной симметрии относительно точки M треугольник ABC переходит в треугольник $A_1B_1C_1$. Следовательно, точки O и O_1 симметричны относительно точки M, то есть M — середина отрезка OO_1. Также мы получаем, что плоскости ABC и $A_1B_1C_1$ параллельны. Тогда на прямой, проходящей через точку P перпендикулярно этим плоскостям, лежат точки D и O_1, поэтому $\angle O_1DO = 90°$. Таким образом, DM — медиана в прямоугольном треугольнике O_1DO, значит, $MO = MD$, что и требовалось.

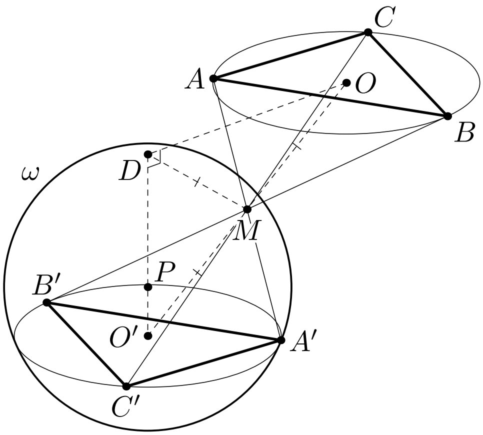

Рис. 5

Комментарий. 1) Отмечен центр O окружности, описанной около треугольника ABC и центр P сферы ω — 0 баллов.

2.1) Доказано, что точка M — середина отрезка OO_1 — 2 балла.

2.2) Задача сведена к доказательству того, что $\angle O_1DO = 90^\circ$ — 4 балла.

3.1) Доказано, что точки P, O_1, D лежат на одной прямой, перпендикулярной плоскостям ABC и $A_1B_1C_1$ — 2 балла.

3.2) Доказано, что $\angle O_1DO = 90^\circ$ — 3 балла.

Суммируются баллы за критерии из разных групп. Внутри одной группы баллы не суммируются.

11.9. Правильный треугольник T со стороной 111 разбит прямыми, параллельными его сторонам, на правильные треугольники со стороной 1. Все вершины этих треугольников, кроме центра треугольника T, отмечены. Назовём множество из нескольких отмеченных точек *линейным*, если все эти точки лежат на одной прямой, параллельной стороне T. Сколько существует способов разбить все отмеченные точки на 111 линейных множеств? (Способы, отличающиеся порядком множеств, считаются одинаковыми.)

(*И. Богданов*)

Ответ. $2^{3\cdot 37^2} = 2^{4107}$.

Решение. Рассмотрим равносторонний треугольник со стороной k, разобьём его на правильные треугольнички со стороной 1 и отметим все вершины этих треугольничков; полученную конструкцию назовём *k-треугольником.* В дальнейшем под *прямыми* мы всегда будем понимать прямые, параллельные сторонам этого треугольника и проходящие через хотя бы одну отмеченную точку.

Лемма. *Пусть A — отмеченная точка в k-треугольнике. Тогда существует единственный способ провести k прямых так, что все отмеченные точки, кроме, возможно, A, покрыты этими прямыми. А именно, для каждой стороны k-треугольника надо провести все прямые, параллельные ей и лежащие между этой стороной и точкой A (включая саму сторону, но исключая прямую, содержащую A, см. рис. 6).*

Доказательство. Индукция по k. База при $k = 1$ проверяется легко: надо провести прямую, содержащую две оставшихся точки, кроме A.

Для перехода рассмотрим сторону k-треугольника, на которой не лежит A. Если прямая, содержащая эту сторону, не проведена, то все $k + 1$ отмеченных точек на этой прямой должны быть покрыты различными прямыми; это невозможно, так как прямых k. Значит, эта прямая проведена. Выкинув её и точки k-треугольника, лежащие на ней, получаем $(k-1)$-треугольник, в котором проведено $k - 1$ прямых с теми же условиями. Осталось применить предположение индукции. $\square$

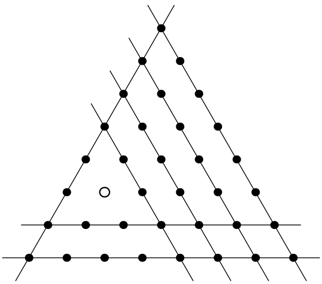

Рис. 6

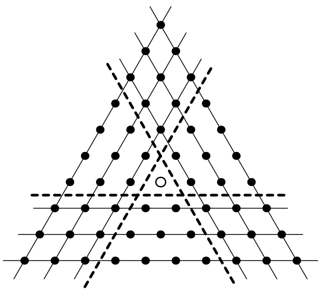

Рис. 7

Перейдём к задаче. Рассмотрим одно из разбиений на линейные множества. Для каждого множества проведём прямую, его содержащую. Тогда эти прямые покрыли все отмеченные точки 111-треугольника, кроме, возможно, его центра A. Значит, эти прямые устроены так, как описано в лемме, и для любого разбиения этот набор прямых один и тот же.

Заметим, что наш 111-треугольник разбился на 6 областей: три «ромба» в углах, состоящих из точек, покрытых нашими прямыми дважды, и три «трапеции» у сторон, в которых каждая точка покрыты одной прямой (см. рис. 7). Тогда каждая точка в «трапеции» относится к множеству, лежащему на этой прямой; каждую же точку в «ромбе» можно отнести к любому из двух множеств, лежащих на проходящих через неё прямых. Все такие выборы можно сделать независимо друг от друга. Поскольку в каждом из трёх «ромбов» всего 37^2 точек, получаем, что требуемых разбиений ровно $2^{3\cdot 37^2}$.

Замечание. Вариант доказательства леммы можно получить, показав сначала, что такое покрытие невозможно осуществить при помощи менее, чем k прямых.

Комментарий. Доказано только, что все точки, кроме одной, нельзя покрыть менее чем 111 прямыми — 1 балл.

Доказана только лемма, а подсчёт проведён неверно — 4 балла.

Лемма используется без доказательства — не более 3 баллов.

Во в целом верном подсчёте допущена ошибка на ± 1 (например, утверждается, что в ромбах по 36^2 или по 38^2 точек) — снимается 1 балл.

11.10. Дано натуральное число $n > 100$. Изначально на доске написано число 1. Каждую минуту Петя представляет число, записанное на доске, в виде суммы двух неравных положительных несократимых дробей, а Вася оставляет на доске только одну из этих двух дробей. Докажите, что Петя может добиться того, чтобы знаменатель оставшейся дроби через n минут не превышал $2^n + 50$ вне зависимости от действий Васи. (*М. Дидин*)

Решение. Приведем стратегию для Пети. Для этого представим 1 в виде суммы 2^n дробей с числителями 1, разобьем их на пары не равных, сложим числа в каждой паре. Затем 2^{n-1}

полученных результатов вновь разобьем на пары не равных, и сложим числа в каждой паре. Будем продолжать так делать, пока не получится одно число. Поскольку сумма всех дробей равна 1, то после n шагов остается число 1.

Предположим, что описанный выше процесс возможен. В таком случае Петя разложит 1 в сумму двух чисел, которые складывались на n-м шаге. Вася выберет одно из слагаемых, которые представимо как сумму двух чисел, сложением которых данное число было получено на $n-1$-м шаге и т.д. В конечном итоге останется одна из исходных 2^n дробей.

Для реализации указанного процесса нам потребуется следующее вспомогательное утверждение.

Лемма. *Есть 2 четвёрки чисел $a_1 > a_2 > a_3 > a_4$ и $b_1 > b_2 > b_3 > b_4$. Тогда их можно сгруппировать по парам (a_i, b_j), чтобы числа в каждой паре были различны и суммы чисел в каждой паре были различны.*

Доказательство. Разберем несколько случаев:

1°. $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$. Если $a_4 \neq b_4$, не умаляя общности $a_3 \geqslant b_3$ и можно сгруппировать $a_1+b_2 > b_1+a_3 > a_2+b_3 > a_4+b_4$. В случае $a_4 = b_4$ и н.у.о. $a_3 \geqslant b_3$ группируем $a_1 + b_2 > b_1 + a_3 > a_2 + b_4 > b_3 + a_4$.

2°. $a_3 = b_3$, $a_4 = b_4$ сводится к предыдущему, если мы перейдем к четверкам чисел $-a_i, -b_i$.

3°. Пары (a_1, b_1) и (a_2, b_2) разные, а также пары (a_3, b_3) и (a_4, b_4) разные. В таком случае покажем как сгруппировать числа первых двух пар между собой, с числами в третьей и четвертой паре поступим аналогично, явно получив две меньшие суммы чем в первой паре. Если $a_1 = b_1$ или $a_2 = b_2$ подходит a_1+b_2, a_2+b_1, в противном случае можно сгруппировать a_1+b_1 и $a_2 + b_2$. □

Покажем, что описанный в начале решения процесс возможен (получится на каждом шаге складывать различные числа), если исходные 2^n дробей удастся разбить на четверки так, чтобы в каждой четверке были попарно различные дроби. Действительно, в таком случае на очередном шаге мы разобьем четверки на пары и согласно лемме будем складывать числа из разных четверок. После каждого такого шага получившиеся суммы вновь будут разбиваться на четверки попарно различных чисел. Продолжая так первые $n-2$ шага, мы в итоге получим четверку различных чисел $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$, на $n-1$ шаге сложим x_1+x_2 и x_3+x_4, и на n-м шаге сложим уже эти два числа.

Таким образом, достаточно представить $1/4$ в виде суммы 2^{n-2} дробей вида $1/m$ четырьмя разными способами, каждый раз используя разные знаменатели, не превосходящие 2^n+50.

Первый способ — сумма 2^{n-2} одинаковых дробей $\frac{1}{2^n}$. Построим три других представления. Заметим, что среди чисел n, $n-1$, $n-2$, $n-3$, $n-4$, $n-5$ не более одной степени двойки и не более двух простых чисел (потому что простые числа, большие трех, могут давать только остатки 1 и 5 от деления на 6), уберем такие числа из рассмотрения. Любое оставшееся число можно представить в виде $n-k=pt$, где $p,t>1$ и t нечетно. Тогда $2^{n-k}+1$ кратно 2^p+1, обозначим частное от деления через q. Получаем, что $2^n+2^k=2^k(2^p+1)q$. Возьмем $2^{n-2}-2^{k+p-2}$ дроби вида $\dfrac{1}{2^n+2^k}$ и 2^{k+p-2} дроби вида $\dfrac{1}{2^{k+p}\cdot q}$. Поскольку $k\leqslant 5$, то $2^{k+p}\cdot q < 2^n+2^k < 2^n+50$. Посчитаем сумму этих дробей:

$$\frac{2^{n-2}-2^{k+p-2}}{2^n+2^k}+\frac{2^{k+p-2}}{2^{k+p-2}\cdot q}=\frac{1}{4}\left(\frac{2^n-2^{k+p}}{2^n+2^k}+\frac{2^k(2^p+1)}{2^n+2^k}\right)=\frac{1}{4}\,.$$

Проделаем так для трех различных значений k, остается убедиться, что полученные представления не содержат одинаковых дробей. Ясно, что с первым выбранным набором три новых не пересекаются, а также дроби вида $\dfrac{1}{2^n+2^k}$ могут быть лишь в одном наборе. Остается проверить, что дроби вида $\dfrac{1}{2^{k+p}q}$ различны. Предположим противное, $2^{k+p}q=2^{k_1+p_1}q_1$. Поскольку q и q_1 нечетны, получаем, что $q=q_1$, и это число — общий делитель 2^n+2^k и $2^n+2^{k_1}$. Тогда $2^k-2^{k_1}$ кратно q, поэтому $q<32$. Однако, $p=\dfrac{n-k}{t}<n/3$, откуда $2^p+1<2^{n/2}$ и $q>2^{n/2}>32$, противоречие.

Замечание. Неформально говоря, Петя с самого начала анализирует все возможные способы течения игры и для каждого варианта заранее продумывает ответ. Этому можно сопоставить двоичное дерево ранга n, в 2^n листьях которого содержатся все возможные исходные (дроби вида $\frac{1}{m}$ с суммой 1 и знаменателями, не превосходящими 2^n+50), а в каждой из остальных вершин записано число, равное сумме чисел в вершинах-потомках. Задача эквивалентна тому, что существует такое дерево, причем у каждой вершины (кроме листьев), в вершинах-потомках записаны разные числа.

Комментарий. (A0) Идея выделять 2^n возможных исходов и описание необходимых условий (в терминах процесса или двоичного дерева) — 1 балл.

(A1) Задача сведена к возможности построения процесса, используемого в решении — 2 балла.

(B0) Сформулирована лемма о разбиении чисел в двух четверках — 1 балл.

(B1) Доказана лемма о разбиении чисел в двух четверках — 2 балла.

(C0) Идея разбивать $\frac{1}{4}$ в виде суммы дробей четырьмя способами так, чтобы разные способы содержали разные дроби и в каждом способе было 2^{n-2} дроби — 1 балл. За предъявление тривиального способа (разбиение на равные дроби) баллы дополнительно не начисляются.

(C1) Построено разбиение единицы на дроби, которые разбиваются на четверки не равных — 3 балла.

Суммируются лишь продвижения из разных групп (A), (B), (C), продвижения за критерии одной группы не суммируются.