9 класс

Второй день

9.6. Для натурального числа n обозначим через S_n наименьшее общее кратное всех чисел $1, 2, \ldots, n$. Существует ли такое натуральное число m, что $S_{m+1} = 4S_m$?

9.7. На доску записали 99 чисел, среди которых нет равных. В тетрадку выписали $\frac{99 \cdot 98}{2}$ чисел — все разности двух чисел с доски (каждый раз из большего числа вычитали меньшее). Оказалось, что в тетрадке число 1 записано ровно 85 раз. Пусть d — наибольшее число, записанное в тетрадке. Найдите наименьшее возможное значение d.

9.8. Дан остроугольный треугольник ABC, в котором $AB < BC$. Пусть M и N — середины сторон AB и AC соответственно, а H — основание высоты, опущенной из вершины B. Вписанная окружность касается стороны AC в точке K. Прямая, проходящая через K и параллельная MH, пересекает отрезок MN в точке P. Докажите, что в четырехугольник $AMPK$ можно вписать окружность.

9.9. Найдите наибольшее число m такое, что для любых положительных чисел a, b и c, сумма которых равна 1, выполнено неравенство

$$\sqrt{\frac{ab}{c+ab}} + \sqrt{\frac{bc}{a+bc}} + \sqrt{\frac{ca}{b+ca}} \geqslant m.$$

9.10. Куб $100 \times 100 \times 100$ разбит на миллион единичных кубиков; в каждом кубике расположена лампочка. Три грани большого куба, имеющие общую вершину, окрашены: одна красным, другая синим, а третья зелёным. Назовём *столбцом* набор из 100 кубиков, образующих блок $1 \times 1 \times 100$. У каждого из 30 000 столбцов есть одна окрашенная торцевая клетка; в этой клетке стоит переключатель — нажатие на этот переключатель меняет состояние всех 100 лампочек в столбце (выключенная лампочка включается, а включенная выключается). Изначально все лампочки были выключены. Петя нажал на несколько переключателей, получив ситуацию, в которой ровно k лампочек горят. Докажите, что после этого Вася может нажать на несколько переключателей так, чтобы ни одна лампочка не горела, использовав не более $k/100$ переключателей с красной грани.