Пригласительный этап 2022

Математика 9 класс решения

---

1. Вариант 1.

   На входе в парк развлечений продают детские и взрослые билеты. Один детский билет стоит 600 рублей. Александр купил 2 детских и 3 взрослых билета, а Анна купила 3 детских и 2 взрослых билета. Известно, что Александр заплатил на 200 рублей больше, чем Анна. Какую сумму в рублях заплатил за билеты Александр?

   Ответ: 3600

   Решение.

   Пусть A – стоимость детского билета, B – стоимость взрослого билета. Вычислим разность $3B + 2A - 2B - 3A = B - A = 200$ рублей. Значит разница между стоимостью взрослого и детского билета – 200 рублей. Тогда Александр заплатил за билеты $5 \cdot 600 + 3 \cdot 200 = 3600$ рублей.

   Вариант 2.

   На входе в парк развлечений продают детские и взрослые билеты. Один детский билет стоит 500 рублей. Александр купил 2 детских и 3 взрослых билета, а Анна купила 3 детских и 2 взрослых билета. Известно, что Александр заплатил на 100 рублей больше, чем Анна. Какую сумму в рублях заплатил за билеты Александр?

   Ответ: 2800

   Вариант 3.

   На входе в парк развлечений продают детские и взрослые билеты. Один детский билет стоит 700 рублей. Александр купил 2 детских и 3 взрослых билета, а Анна купила 3 детских и 2 взрослых билета. Известно, что Александр заплатил на 100 рублей больше, чем Анна. Какую сумму в рублях заплатил за билеты Александр?

   Ответ: 3800

   Вариант 4.

   На входе в парк развлечений продают детские и взрослые билеты. Один детский билет стоит 600 рублей. Александр купил 2 детских и 3 взрослых билета, а Анна купила 3 детских и 2 взрослых билета. Известно, что Александр заплатил на 100 рублей больше, чем Анна. Какую сумму в рублях заплатил за билеты Александр?

   Ответ: 3300

2. Вариант 1.

   Дано множество $A = \{1, 2, 3, ..., 1002\}$. Петя и Вася играют в игру. Петя называет число n, а Вася выбирает из А подмножество, состоящее из n элементов. Вася выигрывает, если в выбранном им подмножестве нет двух взаимно простых чисел, в противном случае – побеждает Петя. Какое наименьшее n должен назвать Петя, чтобы гарантированно выиграть?

Ответ: 502

Решение.

1) Оценка. Заметим, что в множестве A 501 чётное число. Если Петя назовёт $n \leq 502$, то Вася может выбрать n четных чисел из данного множества и победить.

2) Теперь покажем, что при $n = 502$ Вася проиграет. Для этого нам достаточно показать, что в выбранном подмножестве обязательно найдутся два последовательных натуральных числа. Эти числа и будут взаимно простыми.

Разобьём все числа множества A на 501 пару: 1 и 2, 3 и 4, 5 и 6, ..., 1001 и 1002. Тогда, по принципу Дирихле, у нас найдутся по крайней мере два числа, попавшие в одну пару. Они взаимно простые, поэтому Вася проиграл.

Вариант 2.

Дано множество $A = \{1, 2, 3, ..., 2022\}$. Поликарп и Варфоломей играют в игру. Поликарп называет число n, а Варфоломей выбирает из A подмножество, состоящее из n элементов. Варфоломей выигрывает, если в выбранном им подмножестве нет двух взаимно простых чисел, в противном случае – побеждает Поликарп. Какое наименьшее n должен назвать Поликарп, чтобы гарантированно выиграть?

Ответ: 1012

Вариант 3.

Дано множество $A = \{1, 2, 3, ..., 3002\}$. Винтик и Шпунтик играют в игру. Винтик называет число n, а Шпунтик выбирает из A подмножество, состоящее из n элементов. Шпунтик выигрывает, если в выбранном им подмножестве нет двух взаимно простых чисел, в противном случае – побеждает Винтик. Какое наименьшее n должен назвать Винтик, чтобы гарантированно выиграть?

Ответ: 1502

Вариант 4.

Дано множество $A = \{1, 2, 3, ..., 5002\}$. Гарри и Рон играют в игру. Гарри называет число n, а Рон выбирает из A подмножество, состоящее из n элементов. Рон выигрывает, если в выбранном им подмножестве нет двух взаимно простых чисел, в противном случае – побеждает Гарри. Какое наименьшее n должен назвать Гарри, чтобы гарантированно выиграть?

Ответ: 2502

3. Вариант 1.

На острове Невезения живут рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут. Однажды, за круглым столом собрались 2022 аборигена и каждый из них сделал заявление:

«Рядом со мной сидят рыцарь и лжец!»

Известно, что при этом три рыцаря ошиблись (т.е. нечаянно солгали). Какое максимальное количество рыцарей могло находиться за столом?

Ответ: 1349

Решение.

Разобьём всех сидящих за столом на блоки, состоящие из аборигенов одного типа, сидящих подряд. Тогда блоки лжецов могут состоять только из 1 человека, иначе лжец, сидящий с краю в этом блоке скажет правду. Если блок рыцарей состоит из двух человек, то оба рыцаря в нем сказали правду (не ошиблись). Если блок рыцарей состоит из 1 человека –

он ошибся в своём высказывании (у него два соседа лжеца). Если блок рыцарей состоит из $k>2$ человек, то в нем $k-2$ рыцаря, сидящие внутри блока, ошибутся (у них будет по два соседа-рыцаря).

Обозначим за n количество блоков лжецов, за $m \leq 3$ – количество блоков из одного рыцаря. Блоки рыцарей и лжецов чередуются, поэтому их поровну. Тогда, рыцарей – $m+2(n-m)+3-m=2(n-m)+3$, а лжецов – n. Следовательно, $2(n-m)+3+n=2022$, или $n=\frac{2019+2m}{3} \geq \frac{2019}{3}=673$. Тогда рыцарей не больше, чем $2022-673=1349$.

Пример. 673 блока лжецов, по одному в каждом блоке, чередуются с 673 блоками рыцарей, причём в одном блоке 5 рыцарей, а в остальных – по два рыцаря.

Вариант 2.

На острове Невезения живут рыцари и лжецы. Лжецы всегда лгут, рыцари всегда говорят правду. Однажды, за круглым столом собрались 2922 аборигена и каждый из них сделал заявление: рядом со мной сидят рыцарь и лжец. Известно, что при этом три рыцаря ошиблись (т.е. нечаянно солгали). Какое максимальное количество рыцарей могло находиться за столом?

Ответ: 1949

Вариант 3.

На острове Невезения живут рыцари и лжецы. Лжецы всегда лгут, рыцари всегда говорят правду. Однажды, за круглым столом собрались 3822 аборигена и каждый из них сделал заявление: рядом со мной сидят рыцарь и лжец. Известно, что при этом три рыцаря ошиблись (т.е. нечаянно солгали). Какое максимальное количество рыцарей могло находиться за столом?

Ответ: 2549

Вариант 4.

На острове Невезения живут рыцари и лжецы. Лжецы всегда лгут, рыцари всегда говорят правду. Однажды, за круглым столом собрались 4722 аборигена и каждый из них сделал заявление: рядом со мной сидят рыцарь и лжец. Известно, что при этом три рыцаря ошиблись (т.е. нечаянно солгали). Какое максимальное количество рыцарей могло находиться за столом?

Ответ: 3149

4. Вариант 1.

Каждая из клеток поля 3×4 либо свободна, либо занята одной спрятанной миной. В двух клетках, свободных от мин, указано количество мин, находящихся в соседних клетках (см. рисунок).

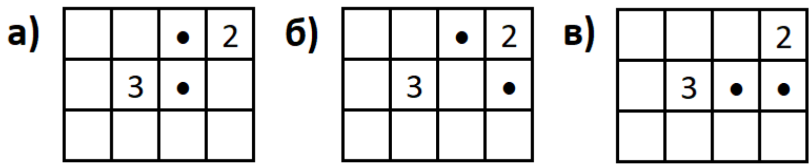
			2
	3		

Сколькими способами можно расположить мины в закрытых клетках? Соседними считаются клетки, имеющие общую сторону или вершину.

Ответ: 72.

Решение.

В трёх клетках, соседних с клеткой 2, стоят две мины. Расположить их можно тремя способами.



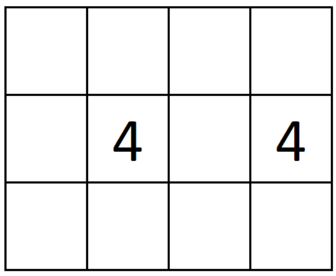
В случае а) у клетки 3 остаётся 6 свободных клеток-соседей, в которые необходимо поместить ещё одну мину. Сделать это можно шестью способами.

В случаях б) и в) в шести оставшихся клетках-соседях нужно расположить две мины. Это можно сделать $6 \cdot 5 : 2 = 15$ способами. Таким образом, мы можем добиться выполнения условий для клеток 2 и 3 $15 + 15 + 6 = 36$ способами и при этом остаётся правя нижняя угловая клетка, которая не граничит ни с 2, ни с 3, поэтому в неё можно поставить мину, а можно не ставить: два варианта.

Итого, у нас получается $36 \cdot 2 = 72$ способа расстановки мин.

Вариант 2.

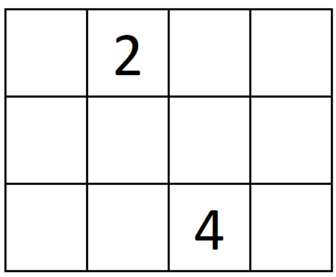
В каждой из клеток поля 3×4 либо свободно, либо спрятана одна мина. На двух клетках, свободных от мин написано количество мин, находящихся в клетках, соседних с данной (см. рисунок). Сколькими способами можно расположить мины в закрытых клетках? Соседними считаются клетки, имеющие общую сторону или вершину.



Ответ: 40.

Вариант 3.

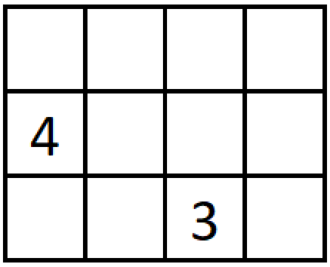
В каждой из клеток поля 3×4 либо свободно, либо спрятана одна мина. На двух клетках, свободных от мин написано количество мин, находящихся в клетках, соседних с данной (см. рисунок). Сколькими способами можно расположить мины в закрытых клетках? Соседними считаются клетки, имеющие общую сторону или вершину.



Ответ: 36.

Вариант 4.

В каждой из клеток поля 3×4 либо свободно, либо спрятана одна мина. На двух клетках, свободных от мин написано количество мин, находящихся в клетках, соседних с данной (см. рисунок). Сколькими способами можно расположить мины в закрытых клетках? Соседними считаются клетки, имеющие общую сторону или вершину.



Ответ: 60.

5. Вариант 1.

На координатной плоскости нарисованы графики трёх приведенных квадратных трехчленов, пересекающие ось ординат в точках $-15, -6, -27$ соответственно. У каждого из трехчленов коэффициент при x – натуральное число, а больший корень – простое число. Найдите сумму всех корней этих трехчленов.

Ответ: -9.

Решение.

Парабола пересекает ось Oy в точке, ордината которой равна свободному члену. Следовательно, наши трехчлены имеют вид $x^2 + ax - 15, x^2 + bx - 6, x^2 + cx - 27$. Обозначим их большие корни через p, q, r соответственно. По теореме Виета второй корень первого трёхчлена равен $-a - p$, тогда $p(-a - p) = -15$ или $p(p + a) = 15 = 3 \cdot 5$. Аналогично, $q(q + b) = 6 = 2 \cdot 3$, $r(r + c) = 27 = 3 \cdot 9$.

Т.к. $p + a > p$, $q + b > q$,$r + c > c$ и p, q, r – простые, то $p = 3$, $q = 2$, $r = 3$ и $p + a = 5$, $q + b = 3$, $r + c = 9$. Тогда, сумма корней равна $3 + (-5) + 2 + (-3) + 3 + (-9) = -9$.

Вариант 2.

На координатной плоскости нарисованы графики трёх приведенных квадратных трехчленов, пересекающие ось ординат в точках $-21, -16, -6$ соответственно. У каждого из трехчленов коэффициент при x – натуральное число, а больший корень – простое число. Найдите сумму всех корней этих трехчленов.

Ответ: -11.

Вариант 3.

На координатной плоскости нарисованы графики трёх приведенных квадратных трехчленов, пересекающие ось ординат в точках $-15, -16, -35$ соответственно. У каждого из трехчленов коэффициент при x – натуральное число, а больший корень – простое число. Найдите сумму всех корней этих трехчленов.

Ответ: -10.

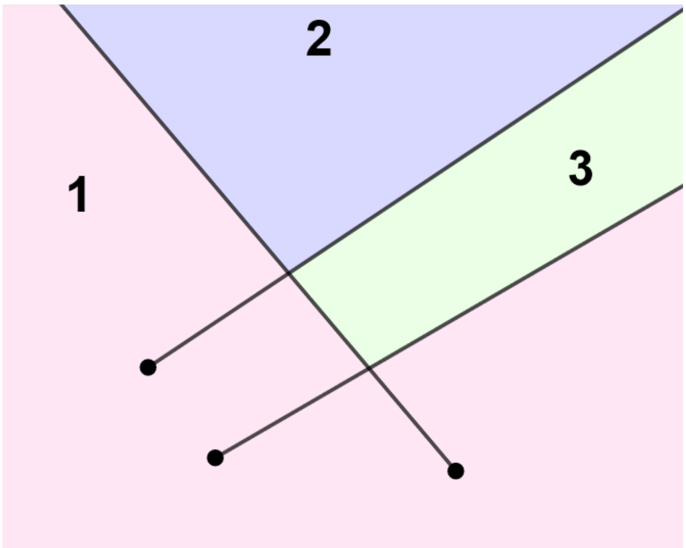
Вариант 4.

На координатной плоскости нарисованы графики трёх приведенных квадратных трехчленов, пересекающие ось ординат в точках $-15, -27, -21$ соответственно. У каждого из трехчленов коэффициент при x – натуральное число, а больший корень – простое число. Найдите сумму всех корней этих трехчленов.

Ответ: -12.

6. Вариант 1.

На рисунке приведен пример того, как 3 луча разбивают плоскость на 3 части. На какое максимальное количество частей могут разбить плоскость 11 лучей?



Ответ: 56.

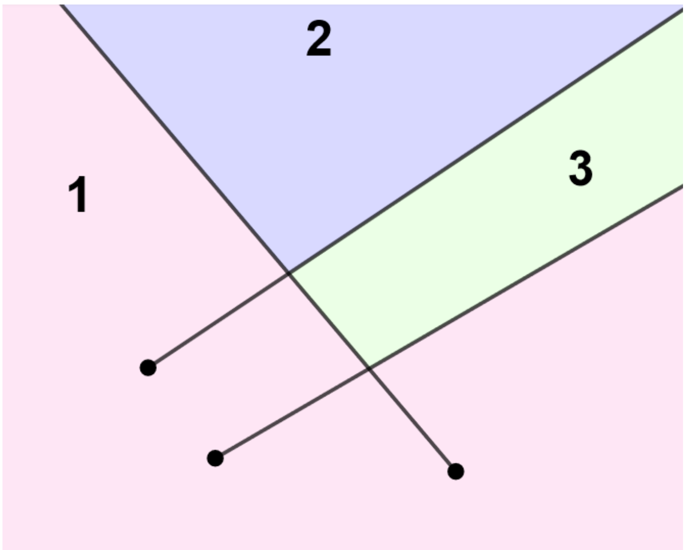
Решение.

Если провести $(n+1)$-ый по счёту луч так, чтобы он пересекал все n предыдущих, то n точек пересечения на нём разбивают его на $n+1$ часть. Отрезок, ближайший к вершине, новых частей разбиения не добавляет, а каждый из остальных n участков ($n-1$ отрезок и 1 луч) делит какую-то из существующих частей разбиения на две новые, т.е. добавится n частей. (Соответственно, если луч пересечёт меньшее количество лучей, то добавится меньшее количество новых частей разбиения).

1 луч – 1 часть.
2 луча – 1+1.
3 луча – 1+1+2
...
n лучей – $1+1+2+\ldots+(n-1) = 1+n(n-1)/2 = (n^2-n+2)/2$.

Для $n = 11$ получается ответ $(121-11+2)/2 = 56$.

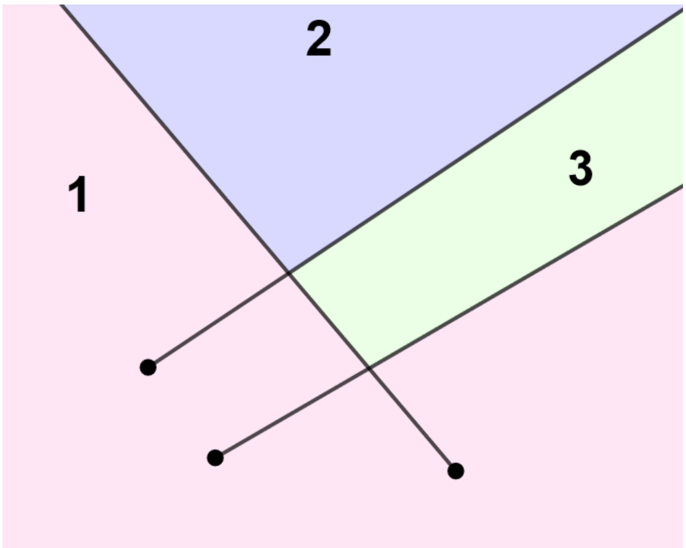
Вариант 2.



На рисунке приведен пример того, как 3 луча могут разбить плоскость на 3 части. На какое максимальное количество частей могут разбить плоскость 12 лучей?

Ответ: 67.

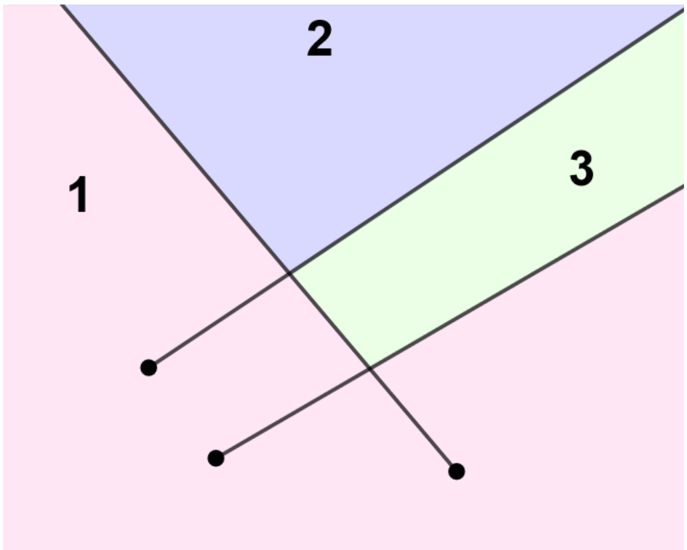
Вариант 3.



На рисунке приведен пример того, как 3 луча могут разбить плоскость на 3 части. На какое максимальное количество частей могут разбить плоскость 13 лучей?

Ответ: 79.

Вариант 4.



На рисунке приведен пример того, как 3 луча могут разбить плоскость на 3 части. На какое максимальное количество частей могут разбить плоскость 10 лучей?

Ответ: 46.

7. Вариант 1.

В кинотеатре «Треугольник» кресла расставлены в виде треугольника: в первом ряду одно место с номером 1, во-втором – места с номерами 2 и 3, в третьем – 4, 5, 6 и т.д. (на рисунке представлен пример такого треугольного зала на 45 мест). Назовем *лучшим местом* в кинозале то, которое расположено в центре зала, т.е. на середине высоты, проведенной из вершины треугольника, соответствующей месту с номером 1. На рисунке представлен пример такого треугольного зала на 45 мест, в котором *лучшим* является место с номером 13.

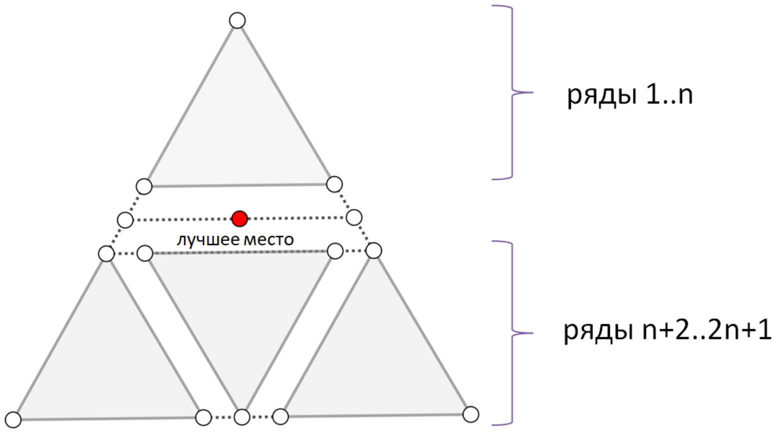
Сколько мест в кинозале, в котором лучшее место имеет номер 265?

Ответ: 1035

Решение.

1 способ.

Заметим, что в кинотеатре не может быть четного числа рядов, иначе лучшего места не будет. Пусть всего в кинотеатре $2n+1$ ряд, тогда лучшее место находится в $n+1$ ряду. Если вычеркнуть этот ряд, то наш треугольник можно разрезать на 4 части, причем количество мест в каждой части будет одинаковым см. рисунок.



Таким образом, задача сводится к нахождению числа n. Найдем наибольшее целое n, удовлетворяющее неравенству: $1+2+...+n<265$ или $n^2+n-530<0$, т.е. $n=22$. Тогда в каждом из четырех отмеченных треугольников будет $1+2+...+22=23\cdot 11=253$ и всего в зале будет $253\cdot 4+23=1035$ мест.

2 способ.

Заметим, что «высота» будет состоять из чисел, стоящих в центре рядов с нечётными номерами

Обозначим через a_k номер места, расположенного в центре ряда с номером k (k - нечётно). Справа и слева от него в данном ряду расположено по $(k-1)/2$ мест. Поэтому при переходе от a_k к a_{k+2} добавляются $(k-1)/2$ последних мест ряда с номером k, $k+1$ место из ряда номер $k+1$ и $(k+1)/2$ первых мест из ряда с номером $k+2$.

Следовательно, $a_{k+2}=a_k+(k-1)/2+(k+1)+(k+1)/2+1=a_k+2(k+1)$.

$a_1=1$

$a_3=a_1+2\cdot 2=1+4$

$a_5=a_3+2\cdot 4=1+4+8$

$a_7=a_3+2\cdot 6=1+4+8+12$

$\ldots$

$a_k=1+4+8+12+\ldots+2(k-1)=1+4(1+2+\ldots+(k-1)/2)=1+(k+1)(k-1)/2,$

Пользуясь этой формулой, найдем номер ряда, в котором находится *лучшее место*.

$$1+(k+1)(k-1)/2=265$$
$$(k^2-1)/2=264$$
$$k^2=264\cdot 2+1=529$$
$$k=\sqrt{529}=23.$$

Общее количество рядов равно $2k-1$ (перед рядом с *лучшим местом* и за ним находится по $k-1$ ряду). Следовательно, общее количество мест в зале находится по формуле

$(1 + 2k - 1) \cdot (2k - 1)/2 = k \cdot (2k - 1)$. Для $k = 23$ получаем $23 \cdot 45 = 1035$.

Вариант 2.

В кинотеатре «Треугольник» кресла расставлены в виде треугольника: в первом ряду одно место с номером 1, во-втором – места с номерами 2 и 3, в третьем – 4, 5, 6 и т.д. (на рисунке представлен пример такого треугольного зала на 45 мест). Назовем *лучшим местом* в кинозале место, которое расположено в центре зала, т.е. на середине высоты, проведенной из вершины треугольника, соответствующей месту №1 (в приведенном примере – это место с номером 13). Сколько мест в кинозале, в котором лучшее место имеет номер 313?

Ответ: 1225

Вариант 3.

В кинотеатре «Треугольник» кресла расставлены в виде треугольника: в первом ряду одно место с номером 1, во-втором – места с номерами 2 и 3, в третьем – 4, 5, 6 и т.д. (на рисунке представлен пример такого треугольного зала на 45 мест). Назовем *лучшим местом* в кинозале место, которое расположено в центре зала, т.е. на середине высоты, проведенной из вершины треугольника, соответствующей месту №1 (в приведенном примере – это место с номером 13). Сколько мест в кинозале, в котором лучшее место имеет номер 181?

Ответ: 703

Вариант 4.

В кинотеатре «Треугольник» кресла расставлены в виде треугольника: в первом ряду одно место с номером 1, во-втором – места с номерами 2 и 3, в третьем – 4, 5, 6 и т.д. (на рисунке представлен пример такого треугольного зала на 45 мест). Назовем *лучшим местом* в кинозале место, которое расположено в центре зала, т.е. на середине высоты, проведенной из вершины треугольника, соответствующей месту №1 (в приведенном примере – это место с номером 13). Сколько мест в кинозале, в котором лучшее место имеет номер 145?

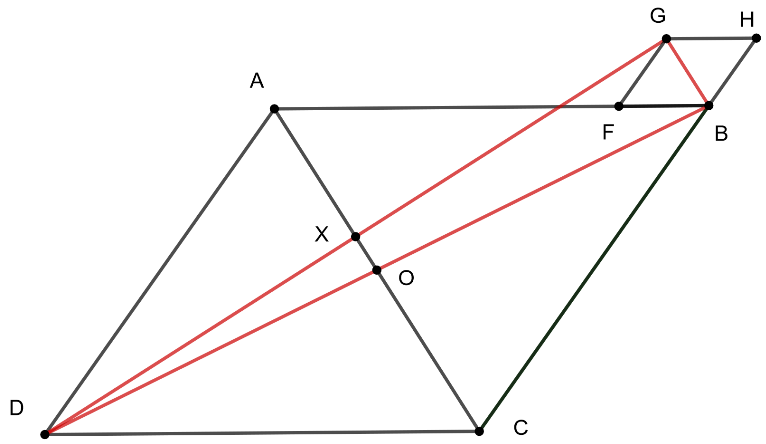
Ответ: 561

8. Вариант 1.

На стороне AB параллелограмма $ABCD$ выбрана точка F, а на продолжении стороны BC за вершину B — точка H так, что $AB/BF = BC/BH = 5$. Точка G выбирается так, что $BFGH$ — параллелограмм. GD пересекает AC в точке X. Найдите AX, если $AC = 100$.

Ответ: 40.

Решение.



Проведем в параллелограмме $ABCD$ диагональ BD, а в параллелогорамме $BFGH$ диагональ GB. Пусть BD пересекает AC в точке O. Докажем, что $AC||GB$. Треугольники ABC и GHB подобны по двум сторонам и углу между ними: $AB/BF = BC/BH$ и $\angle GHB = \angle ABC$. Значит $\angle GBH = \angle ACB$, поэтому $AC||GB$. Так как O – точка пересечения диагоналей параллелограмма, то $DO = BO$, значит XO – средняя линия треугольника BDG. Из подобия также следует, что $AC/GB = 5$, $GB = 20$. Тогда $XO = GB/2 = 10$, $AX = 100/2 - 10 = 40$.

Вариант 2.

На стороне AB параллелограмма $ABCD$ выбрана точка F, а на продолжении стороны BC за вершину B — точка H так, что $AB/BF = BC/BH = 7$. Точка G выбирается так, что $BFGH$ — параллелограмм. GD пересекает AC в точке X. Найдите AX, если $AC = 140$.

Ответ: 60.

Вариант 3.

На стороне AB параллелограмма $ABCD$ выбрана точка F, а на продолжении стороны BC за вершину B — точка H так, что $AB/BF = BC/BH = 6$. Точка G выбирается так, что $BFGH$ — параллелограмм. GD пересекает AC в точке X. Найдите AX, если $AC = 60$.

Ответ: 25.

Вариант 4.

На стороне AB параллелограмма $ABCD$ выбрана точка F, а на продолжении стороны BC за вершину B — точка H так, что $AB/BF = BC/BH = 9$. Точка G выбирается так, что $BFGH$ — параллелограмм. GD пересекает AC в точке X. Найдите AX, если $AC = 126$.

Ответ: 56.