10 класс

10.7. День защитника Отечества

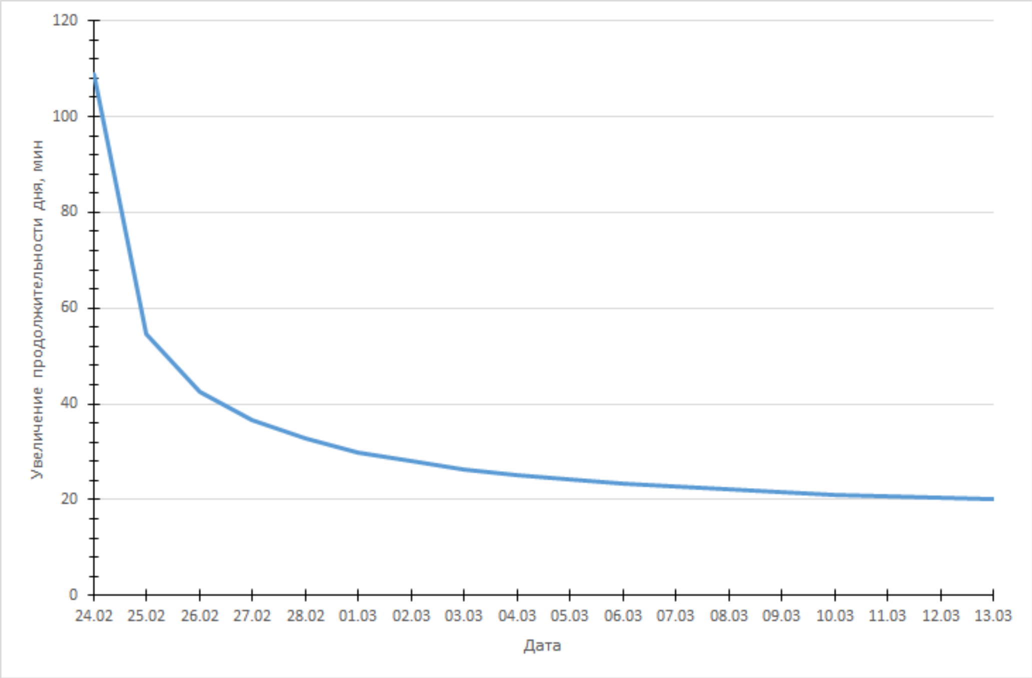
Условие. В таблице приведены значения продолжительности светового дня в некотором пункте наблюдения по сравнению с 23 февраля. Определите широту места наблюдения с точностью до 0.5°.

Дата	Продолжительность дня	Дата	Продолжительность дня
23 февраля	X	05 марта	X + 06:49:05
24 февраля	X + 01:48:56	06 марта	X + 07:12:27
25 февраля	X + 02:43:28	07 марта	X + 07:35:06
26 февраля	X + 03:26:07	08 марта	X + 07:57:09
27 февраля	X + 04:02:39	09 марта	X + 08:18:43
28 февраля	X + 04:35:20	10 марта	X + 08:39:52
01 марта	X + 05:05:19	11 марта	X + 09:00:38
02 марта	X + 05:33:17	12 марта	X + 09:21:07
03 марта	X + 05:59:44	13 марта	X + 09:41:21
04 марта	X + 06:24:54		

Решение. Проанализируем представленные данные. Определим, как изменялась продолжительность дня за сутки, то есть рассчитаем разницу между продолжительностью дня в выбранную дату и предыдущую. Результаты занесём в таблицу и построим график:

Дата	Изменение	Дата	Изменение
24 февраля	1:48:56	05 марта	0:24:11
25 февраля	0:54:32	06 марта	0:23:22
26 февраля	0:42:39	07 марта	0:22:39
27 февраля	0:36:32	08 марта	0:22:03
28 февраля	0:32:41	09 марта	0:21:34
01 марта	0:29:59	10 марта	0:21:09
02 марта	0:27:58	11 марта	0:20:46
03 марта	0:26:27	12 марта	0:20:29
04 марта	0:25:10	13 марта	0:20:14

На графике заметно очень резкое увеличение продолжительности дня в начале периода наблюдений. Уже на интуитивном уровне можно понять, что в эти дни пункт наблюдений прошел через границу полярной ночи и, скорее всего, 23 или 24 февраля был первым днем с солнечным светом. Действительно, если предположить, что хотя бы в один предыдущий день, 22 февраля, Солнце восходило над горизонтом, то по логике данных, разница долготы дня между 22 и 23 февраля должна быть не меньше 3 часов. Если принять это на веру, то уже 13 марта, за неделю до весеннего равноденствия, долгота дня должна превысить 12.5 часов, что выглядит странно. Вариант с восходом Солнца в этом пункте еще на день раньше, 21 февраля, можно сразу же исключить полностью. Таким образом, мы уже знаем время окончания полярной ночи в этом пункте с точностью до дня (23 февраля), что позволяет найти широту.



События происходят за 25 дней до весеннего равноденствия, и Солнцу осталось пройти по эклиптике дугу l около 24-25 градусов (будем считать ее равной 24.5°). Отсюда мы получаем его склонение 23 февраля:

$$\delta = -l \sin \varepsilon = -9.7°.$$

В это время Солнце становится видимым в пункте с широтой φ, то есть его высота в верхней кульминации становится больше, чем $h = -\rho - r = -51' = -0.85°$ (здесь ρ – рефракция у горизонта, r – видимый радиус Солнца). Отсюда

$$\varphi = 90° + \delta + \rho + r \approx 81.0°.$$

В реальности, данные относятся к пункту с широтой +80.8°, первый солнечный день там действительно наступил 23 февраля и продлился 25 минут.

Система оценивания.

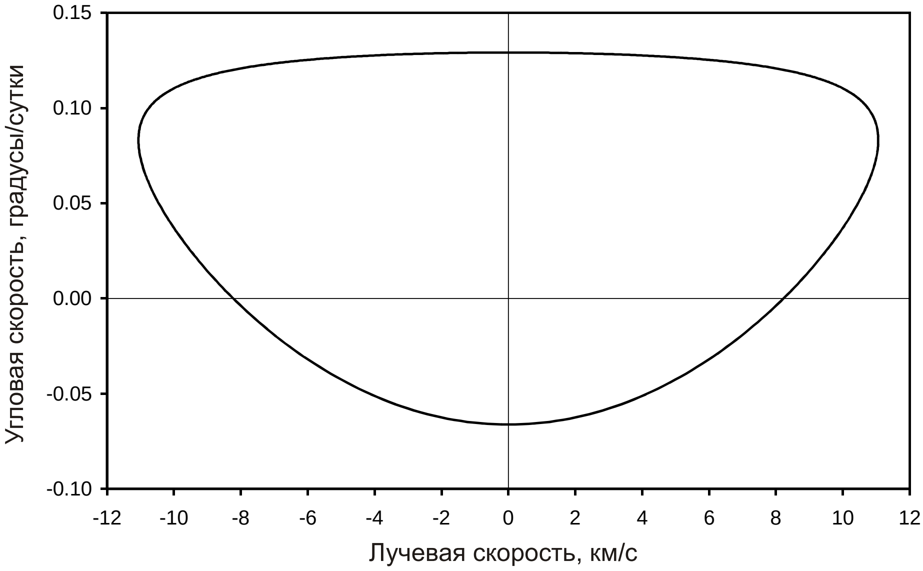
1 этап – 6 баллов. Вывод, что полярная ночь в данном пункте завершилась 23 февраля с точностью до одного дня. От участников достаточно качественного доказательства, хотя они могут использовать и более строгие выкладки.

2 этап – 3 балла. Определение склонения Солнца во время окончания полярной ночи, точность 0.5°. Участники могут определять склонения, считая его равномерно изменяющимся перед весенним равноденствием, а могут использовать и формулы сферической тригонометрии. При большей погрешности оценка уменьшается на 1 балл за каждые лишние 0.5°, но без влияния на следующий этап решения.

3 этап – 6 баллов. Определение широты места, точность 0.5°. При вычислениях обязателен учет атмосферной рефракции (без него оценка уменьшается на 2 балла). Фактор видимого радиуса Солнца можно не учитывать, если указать, что он незначителен для данного решения. При отсутствии указания на этот фактор оценка уменьшается на 1 балл.

10.8. Скоростная диаграмма

Условие. С некоторого объекта Солнечной системы **А**, двигающегося по круговой орбите, проводятся наблюдения другого объекта Солнечной системы **В**, также двигающегося по круговой орбите в той же плоскости. Перед Вами диаграмма «лучевая скорость – видимая угловая скорость» объекта **В** при наблюдении с объекта **А**. Положительный знак угловой скорости соответствует движению объекта **В** среди звезд в одном направлении с Солнцем, единица измерения угловой скорости – градусы за земные сутки. Оба объекта имеют сферическую форму, эффектами их атмосфер пренебречь. Определите радиусы орбит объектов **А** и **В**.

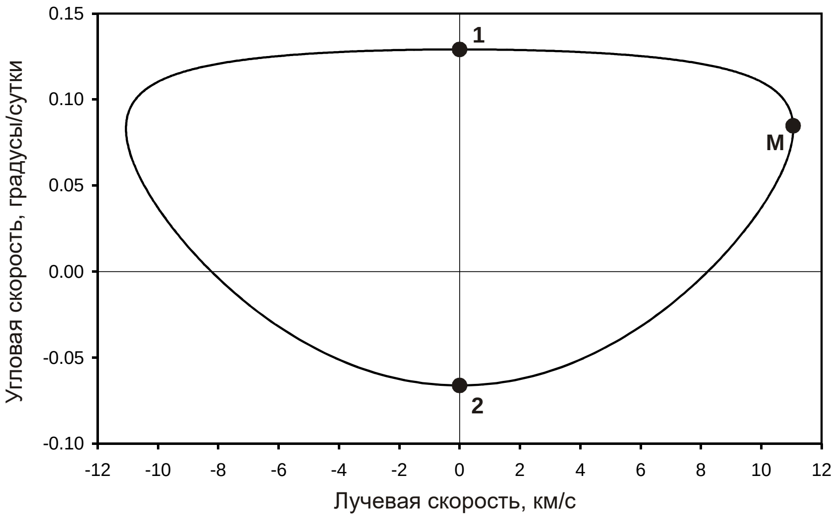


Решение. Вначале обратим внимание на один важный факт: угловая скорость объекта **А** при наблюдении с объекта **В** равна по величине и знаку угловой скорости объекта **В** при наблюдении с объекта **А** – это есть угловая скорость вращения линии, содержащей отрезок **АВ**. То же самое можно сказать о лучевой скорости. Поэтому в задаче будет два решения, в которых объекты **А** и **В** меняются местами. Предположим для определенности, что объект **В** находится дальше от Солнца, чем объект **А**.

Еще один важный факт состоит в том, что в моменты, когда лучевая скорость равна нулю (1 и 2 на рисунке) – очевидно, что это моменты соединения или противостояния объектов с Солнцем – угловые скорости имеют разный знак. При этом угловая скорость прямого движения ω_1 по модулю больше, чем в случае попятного движения ω_2. Это может быть в том случае, если оба тела вращаются вокруг Солнца в одном направлении. Запишем выражения для этих угловых скоростей:

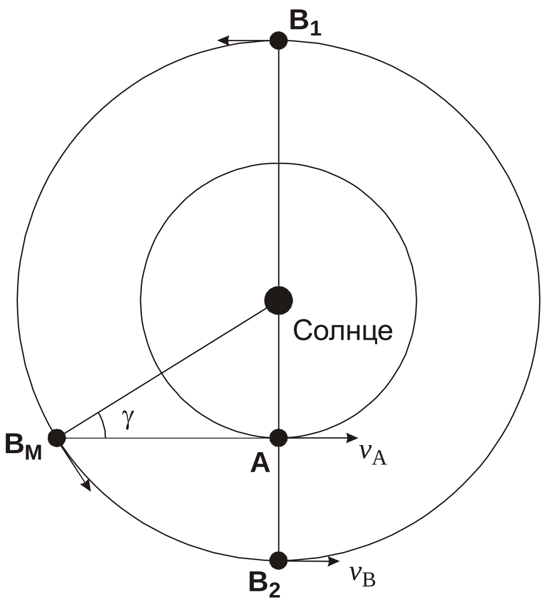
$$\omega_1 = \frac{v_B + v_A}{r_B + r_A} = \sqrt{GM}\,\frac{r_B^{-1/2} + r_A^{-1/2}}{r_B + r_A},$$

$$\omega_2 = \frac{v_B - v_A}{r_B - r_A} = \sqrt{GM}\,\frac{r_B^{-1/2} - r_A^{-1/2}}{r_B - r_A}.$$



Здесь M – масса Солнца, r_A и r_B – радиусы орбит тел, а v_A и v_B – их орбитальные скорости в инерциальной системе координат. Из графика имеем: ω_1 = 0.129°/сут, ω_2 = –0.066°/сут. Запишем выражение для отношения этих угловых скоростей (обратим внимание, что оно отрицательно):

$$K \equiv \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_B^{-1/2} + r_A^{-1/2}}{r_B + r_A} \cdot \frac{r_B - r_A}{r_B^{-1/2} - r_A^{-1/2}} = \frac{r_B^{-1/2} r_A^{-1/2} (r_A^{1/2} + r_B^{1/2})}{r_B + r_A} \cdot \frac{r_B - r_A}{r_B^{-1/2} r_A^{-1/2} (r_A^{1/2} - r_B^{1/2})}.$$



Величина K составляет –1.95. Раскладывая множитель (r_B – r_A) как разность квадратов, имеем:

$$K = \frac{(r_A^{1/2} + r_B^{1/2})}{r_B + r_A} \cdot (r_A^{1/2} + r_B^{1/2}) = \frac{r_A + r_B + 2\sqrt{r_A r_B}}{r_A + r_B}.$$

Введем для простоты обозначение:

$$x = \sqrt{\frac{r_B}{r_A}}$$

и заметим, что по нашему предположению $x>1$. Тогда получаем

$$K = \frac{1+x^2+2x}{1+x^2}; \quad x^2(K-1)-2x+(K-1)=0.$$

В соответствии с нашим предположением, выбираем больший корень уравнения:

$$x = \frac{1+\sqrt{1-(K-1)^2}}{K-1} = 1.38.$$

Отметим, второй корень оказывается равен обратной величине от первого, отражая отмеченное нами свойство неизменности угловых скоростей при перестановке тел **A** и **B**.

Перейдем в систему отсчета, в которой объект **B** неподвижен, а объект **A** движется по орбите с постоянной угловой скоростью, соответствующей разности угловых скоростей орбитального вращения тел: $\Omega = \Omega_A - \Omega_B$. Очевидно, угловые скорости видимого движения тел в небе в этой системе отсчета будут другими, и мы не можем рассматривать их в прямом соответствии с заданной диаграммой. Но вот лучевые скорости останутся теми же.

Очевидно, что лучевая скорость v_R (мы не ставим здесь индекс A или B в соответствии со сказанным выше) будет максимальна по модулю, если в этой системе отсчета тело **A** движется точно к телу **B** или точно от него, то есть находится в наибольшей элонгации. Запишем выражение для максимальной лучевой скорости:

$$v_R = \Omega \cdot r_A = r_A\left(\sqrt{\frac{GM}{r_A^3}} - \sqrt{\frac{GM}{r_B^3}}\right) = \sqrt{\frac{GM}{r_A}} \cdot \left(1 - \frac{1}{x^3}\right).$$

Величину v_R мы можем определить из графика, она равна 11 км/с (точное значение – 11.05 км/с). Отсюда мы определяем значения радиусов орбит тел:

$$r_A = \frac{GM}{v_R^2} \cdot \left(1 - \frac{1}{x^3}\right)^2 = r_0 \frac{v_0^2}{v_R^2} \cdot \left(1 - \frac{1}{x^3}\right)^2 = 2.75 \text{ а.е.}; \quad r_B = r_A x^2 = 5.2 \text{ а.е.}$$

Здесь v_0 – орбитальная скорость Земли, r_0 – радиус орбиты Земли (астрономическая единица). Очевидно, проводились наблюдения Юпитера с астероида главного пояса.

Выше приведен один из способов решения. Существуют и другие, которые объединяются одним общим свойством: из графика мы получаем два независимых параметра, которые в итоге дают нам систему уравнений для определения двух неизвестных r_A и r_B. Один из них связан со следующим свойством: в момент максимума модуля лучевой скорости v_R объект с меньшим радиусом орбиты (в соответствии со сделанным выше предположением, пусть это будет **A**) находится в небе объекта **B** в наибольшей элонгации. В это время объект A сохраняет постоянное угловое расстояние от Солнца, а так как движение обоих тел происходит по круговым орбитам в одной плоскости, то угловая скорость объекта **A** в небе объекта **B**, она же – угловая скорость объекта **A** в небе объекта **B**, равна угловой скорости Солнца в небе объекта **B**:

$$\omega_E = \Omega_B = \sqrt{\frac{GM}{r_B^3}} = \Omega_0 \sqrt{\frac{r_0^3}{r_B^3}} = 0.083^\circ / \text{сут}.$$

Здесь Ω_0 – орбитальная угловая скорость Земли (0.986°/сут). Отсюда мы сразу получаем радиус орбиты внешнего тела:

$$r_B = r_0 \cdot \left(\frac{\Omega_0}{\Omega_B} \right)^{2/3} = 5.2 \; а.е.$$

Далее мы можем воспользоваться данными о величинах угловой скорости в соединении и противостоянии объекта **B** при наблюдении с объекта **A**. Как уже было отмечено выше, они равны

$$\omega_1 = \frac{v_B + v_A}{r_B + r_A} = \sqrt{GM}\,\frac{r_B^{-1/2} + r_A^{-1/2}}{r_B + r_A},$$
$$\omega_2 = \frac{v_B - v_A}{r_B - r_A} = \sqrt{GM}\,\frac{r_B^{-1/2} - r_A^{-1/2}}{r_B - r_A}.$$

Перемножим их друг на друга:

$$\omega_1\omega_2 = GM\,\frac{(r_B^{-1/2} + r_A^{-1/2})\cdot(r_B^{-1/2} - r_A^{-1/2})}{(r_B + r_A)\cdot(r_B - r_A)} = GM\,\frac{r_B^{-1} - r_A^{-1}}{r_B^2 - r_A^2} = -\frac{GM}{r_A r_B (r_A + r_B)} \equiv Q.$$

Эта величина нам известна ($-8.51\cdot10^{-3}$ °^{2}/сут^2). Нам остается найти r_A. Для этого запишем последнюю формулу в виде квадратного уравнения относительно этой величины:

$$r_A^2 r_B + r_A r_B^2 + \frac{GM}{Q} = 0.$$

Решая его, мы выбираем положительный корень r_A:

$$r_A = \frac{-r_B^2 + \sqrt{r_B^4 - 4GM\,r_B / Q}}{2r_B} = 2.75 \; а.е.$$

Система оценивания. Выше приведен один из способов решения задания, представляющийся наиболее простым. Участники могут использовать другие способы, которые могут быть сопряжены со сложными математическими выкладками, тем не менее необходимо четко проверять их корректность. Вне зависимости от способа, для решения и определения двух неизвестных величин (r_A и r_B) с графика необходимо снять два параметра. При способе, описанном выше, это отношение угловых скоростей в соединении и противостоянии (K) и максимальный модуль угловой скорости (v_R). Возможно использование величин угловых скоростей ω_1 и ω_2 по отдельности, и тогда ответ можно получить, даже не привлекая данных о лучевых скоростях. При использовании пути решения, описанного выше, система оценивания следующая:

<u>1 этап – 1 балл.</u> Обоснование, что объекты движутся по орбитам в одном направлении. Он может быть сделан на основе модулей прямой и попятной угловой скорости в моменты, когда лучевая скорость обращается в ноль. Участник может не делать этот вывод, но тогда ему необходимо рассматривать случай противоположных направлений вращения по ходу дальнейшего решения, доказывая, что его не может быть в данных условиях. Если участник сразу рассматривает только сонаправленное вращение двух тел, не обосновывая такой выбор – данный 1 балл не выставляется, последующие оцениваются в полной мере.

2 этап – 5 баллов. Определение и анализ отношения угловых скоростей в соединении и противостоянии. Этап предполагает правильное экспериментальное определение этой величины. Максимальная погрешность 0.05, диапазон правильных значений, при котором возможно дальнейшее решение данным способом: от –1.9 до –2.0. Это оценивается в 2 балла.

При погрешностях до 0.15 выставляется 1 балл). При вычислении обратной величины максимальная погрешность составляет 0.02, при погрешности до 0.05 выставляется 1 балл). Кроме этого, участник должен правильно связать эту величину с радиусами орбит и их отношением (3 балла).

3 этап – 5 баллов. Аналогично предыдущему этапу, должен быть правильно измерен другой наблюдательный параметр (2 балла). В случае максимальной лучевой скорости допустимая погрешность составляет 0.2 км/с (1 балл при погрешности до 0.4 км/с). Далее должна быть восстановлена верная связь этого параметра с искомыми величинами (3 балла).

4 этап – 4 балла (2+2). Определение радиусов орбит обоих тел. Максимальная погрешность (без учета ошибок на предыдущих этапах) – 0.1 а.е. для ближнего и 0.2 а.е. для дальнего тела. Если решение велось способом, описанным выше (первым), то на оценку за этот этап не влияет погрешность определения величины K, если она оказалась близка к –2.