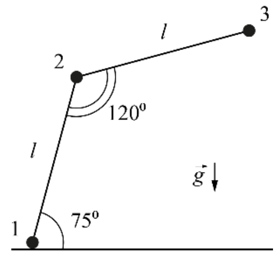
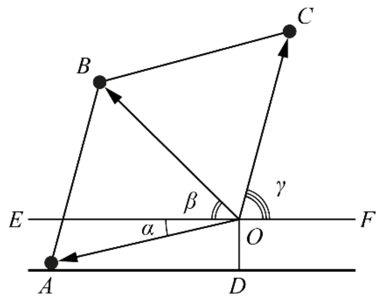
9.1 Три ракеты. Из точки, находящейся на высоте h над поверхностью земли под разными углами к горизонту с одинаковыми скоростями v_0 одновременно разлетаются три осколка фейерверка. Векторы их скоростей лежат в одной вертикальной плоскости. Через время $\tau = 1{,}0$ с после вылета осколки взрываются. Вспышка первого происходит у самой поверхности земли, вспышка второго – на расстоянии $l = 10$ м от первого, а вспышка третьего – на таком же расстоянии l от второго. Отрезок, соединяющий две первые вспышки, составляет угол 75° с горизонтом, а отрезок, соединяющий вторую и третью вспышку, составляет угол 120° с первым отрезком, как показано на рисунке. Определите:



- начальные скорости v_0 осколков;
- углы с горизонтом, под которыми направлены векторы начальных скоростей каждого из осколков;
- высоту h, на которой разорвался фейерверк.

Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.

9.1. Возможное решение. Перейдём в систему отсчёта, движущуюся вниз с ускорением $\vec{g}$, скорость которой равна нулю в момент взрыва фейерверка. В этой системе осколки движутся по прямолинейным траекториям, направления которых совпадают с направлениями векторов начальных скоростей (углы α, β и γ на рис. 2). Точки вспышек в этой системе отсчёта (т. A, B и C) лежат на окружности радиусом $R = v_0\tau$, где v_0 – начальная скорость ракет, $\tau = 1$ с.



Точки 1, 2 и 3, в которых происходят вспышки в земной системе отсчета лежат точно на такой же окружности, но её центр смещён вниз по отношению к вершине холма на $\Delta h = \frac{g\tau^2}{2} = 5$ м.

Треугольники AOB и OBC – равносторонние с радиусом $R = l = 10$ м.

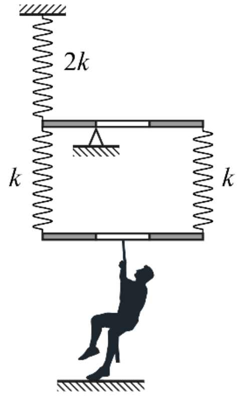
Таким образом, начальная скорость осколков $v_0 = \frac{l}{\tau} = 10\,\frac{\text{м}}{\text{с}}$.

Из геометрии $\alpha = 15°, \beta = 45°, \gamma = 75°$. Направления полёта, соответствующие значениям этих углов указаны на рис 2.

Точка O – центр окружности выше уровня земли на $OD = AO sin 15° = l \cdot sin 15°$. Чтобы определить высоту холма надо ещё прибавить $\Delta h = \frac{g\tau^2}{2}$. Окончательно, высота холма

$$h = l \cdot sin 15° + \frac{g\tau^2}{2} \approx 7{,}6 \text{ м.}$$

№	**9.1. Критерии оценивания (из 12 баллов)**	**Баллы**
1	Идея перехода в систему отсчёта, движущуюся вниз с ускорением $\vec{g}$	1
2	Указано, что точки вспышки ракет лежат на окружности радиуса $R = v_0\tau$, как в системе отсчёта, связанной с землёй, так и в выбранной системе отсчёта, движущейся с ускорением $\vec{g}$	2
3	Указано, что центры окружностей смещены на $\Delta h = \frac{g\tau^2}{2}$	2
4	Из геометрии верно определена начальная скорость ракет	2
5	Из геометрии верно определены углы с горизонтом, под которыми направлены векторы скоростей каждой из ракет (по 1 баллу за каждое верное значение угла)	3
6	Определена высота холма	2



9.2 Пружины. Система состоит из трёх лёгких пружин и двух лёгких стержней. Коэффициенты жёсткости пружин указаны на рисунке. Верхний стержень на трети своей длины прикреплён к шарнирной опоре.

- Как изменится (в какую сторону и на сколько) длина верхней пружины, если к середине нижнего стержня приложить внешнюю силу F, направленную вертикально вниз?
- Чему равен коэффициент k_0 – жёсткости системы, если на неё действовать внешней вертикальной силой, приложенной к середине нижнего стержня?

Углы поворота стержней малы. Пружины остаются вертикальными.

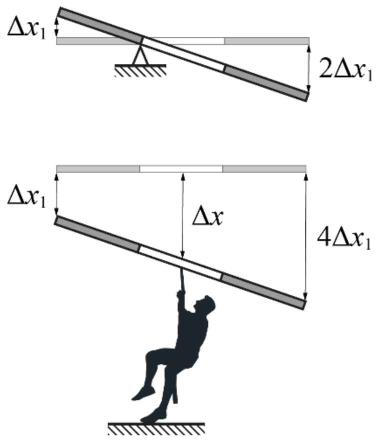
9.2. Возможное решение.

1. Так как нижний стержень легкий, а внешняя сила прикладывается к его середине, то силы упругости, действующие на стержень со стороны пружин должны быть равны. Обозначим их за T. Из условия равновесия нижнего стержня, $F = 2T$.
2. Записывая правило моментов для верхнего стержня относительно шарнира, в предположении, что верхняя пружина растянута силой T_1 получим:

$T_1 l + 2Tl = Tl$, где l – длина одной трети стержня.

Откуда $T_1 = –T$. Это означает, что наше предположение неверно, и верхняя пружина сжимается силой T.

3. Воспользовавшись законом Гука, найдём деформацию верхней пружины: $\Delta x_1 = F/(4k)$.
4. Абсолютные удлинения нижних пружин одинаковы и равны $\Delta x_2 = F/(2k) = 2\Delta x_1$.
5. Найдем кинематическую связь между деформациями пружин и смещением Δx точки приложения силы F.



Так как верхний стержень жёсткий, то его правый конец сместится вниз на $2\Delta x_1$. Но деформации нижних пружин тоже $2\Delta x_1$, следовательно, нижний конец правой пружины опустится на $4\Delta x_1$. Нижний стержень, останется параллельным верхнему, и нижний конец левой пружины сместится вниз на Δx_1.

Из жёсткости нижнего стержня следует, что его середина опустится на $\Delta x = (5/2)\Delta x_1$.

6. Запишем закон Гука для всей системы: $F = k_0(5/2)\Delta x_1$, откуда $k_0 = (2/5)F/\Delta x_1 = (8/5)k$.

№	9.2. Критерии оценивания (из 12 баллов)	Баллы
1	Учтено и обосновано равенство сил упругости нижних пружин	2
2	Использована связь сил упругости нижних пружин и силы F	1
3	Записано правило моментов для верхнего стержня	1
4	Найдена величина и направление деформации верхней пружины	2
5	Учтена жёсткость верхнего стержня и найдена связь смещений его концов	1
6	Найдены смещения концов нижнего стержня	1
7	Найдено смещение точки приложения силы F	2
8	Учтён закон Гука для всей системы	1
9	Найдена эквивалентная жёсткость системы	1

9.3 Сосуды с водой. В трёх сосудах находится вода массой m, $2m$ и $4m$ при температуре $t = 20°C$, $3t$ и $2t$ соответственно. Порцию воды из первого сосуда переливают во второй. Затем такую же по массе порцию из второго сосуда переливают в третий. И в завершение, такую же порцию из третьего сосуда переливают в первый. В результате в первом сосуде устанавливается равновесная температура $t_1 = 28°C$, а во втором – $t_2 = 54°C$. Определите новую температуру t_3 в третьем сосуде. Тепловыми потерями и теплоёмкостью сосудов можно пренебречь.

9.3. Возможное решение. Так как переливается одна и та же масса воды, в итоге во всех сосудах оказывается такое же её количество, как и до начала процесса. Поэтому целесообразно применить уравнение теплового баланса не к каждому отдельному процессу переливания, а сразу к конечному состоянию системы. По условию вода в первом сосуде получает количество теплоты:

$$Q_1 = cm(t_1 - t),$$

а во втором и третьем соответственно:

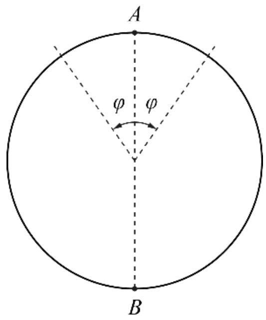
$$Q_2 = c2m(t_1 - 3t) \text{ и } Q_3 = c4m(t_1 - 2t).$$

Поскольку потерь тепла не было, уравнение теплового баланса имеет вид:

$$Q_1 + Q_2 + Q_3 = 0 \text{ или } cm(t_1 - t) + c2m(t_1 - 3t) + c4m(t_1 - 2t) = 0.$$

Решая уравнение, получим: $t_3 = (15t - t_1 - 2t_2) = 41°C$.

№	9.3. Критерии оценивания (из 12 баллов)	Баллы
1	Указано на то, что масса воды в каждом из сосудов не изменится	1
2	Получено выражение для количества теплоты, которое получит вода в первом сосуде	2
3	Получено выражение для количества теплоты, которое получит вода во втором сосуде	2
4	Получено выражение для количества теплоты, которое получит вода в третьем сосуде	2
5	Указано на то, что $Q_1 + Q_2 + Q_3 = 0$ (1 балл) и, что $cm(t_1 - t) + c2m(t_1 - 3t) + c4m(t_1 - 2t) = 0$ (ещё 2 балла)	3
6	Найдена температура t_3	2



9.4 Кольцо. Кольцо радиусом r сделано из проволоки, удельное сопротивление ρ которой увеличивается от точки A до точки B по линейному закону $\rho = \alpha\varphi$, где α – известная постоянная, φ – угол, отсчитываемый от точки A по (или против) часовой стрелки, как показано на рисунке.

- Определите сопротивление R_0 всей проволоки, из которой изготовлено кольцо.
- Найдите на кольце две точки M и N между которыми эквивалентное сопротивление R_{MN} кольца максимально при минимальном расстоянии между M и N. Определите значение этого сопротивления R_{max} и расстояние L между M и N.

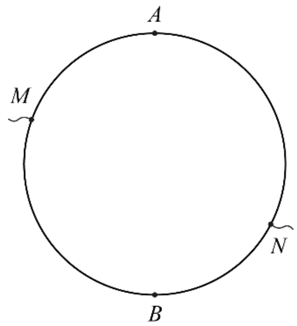
Площадь S сечения проволоки известна и постоянна вдоль всего кольца.

9.4. Возможное решение.

1. Сопротивление всей проволоки R_0 не зависит от того, в какой именно точке мы её разрежем (все элементарные участки проволоки соединены друг с другом последовательно). Для упрощения разрежем кольцо в точке A, чтобы сначала найти сопротивления $R_0/2$ его двух симметричных половинок, а затем их сложить.

Поскольку удельное сопротивление проволоки изменяется по линейному закону (от угла φ или от расстояния l от точки A), для вычисления её сопротивления воспользуемся средним значением удельного сопротивления $\rho_{ср} = \alpha\pi/2$. Откуда $R_0/2 = \rho_{ср}\pi r/S = \alpha\pi^2 r/(2S)$, или

$$R_0 = \alpha\pi^2 r/S. \qquad (1)$$



2. Подключим контакты к некоторым точкам M и N кольца. Получившаяся цепь теперь состоит из двух участков – MAN и MBN, соединённых параллельно, и её сопротивление R_{MN} определяется соотношением:

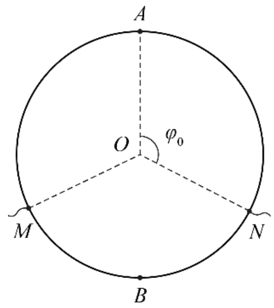
$$R_{MN} = \frac{R_{MAN}R_{MBN}}{R_{MAN}+R_{MBN}} \qquad (2),$$

где R_{MAN} и R_{MBN} – сопротивления соответствующих участков, причём знаменатель этой формулы не зависит от того, в каких точках мы подключаемся к кольцу, и равен сопротивлению R_0 всей проволоки. Формулу (2) можно представить в виде:

$$R_{MN} = \frac{R_{MAN}(R_0 - R_{MAN})}{R_0}.$$

Сопротивление кольца между этими точками R_{MN} как функция величины R_{MAN} представляет собой параболу с ветвями, направленными вниз, и достигает максимума при $R_{MAN} = R_0/2$. Следовательно, сопротивление кольца максимально при $R_{MAN} = R_{MBN} = R_0/2$ и $R_{max} = R_0/4 = \alpha\pi^2 r/(4S)$.

3. Разделить всю проволоку кольца на два участка с равными сопротивлениями можно бесконечным количеством способов. Например, присоединив контакты к точкам A и B мы получим тот же самый результат для R_{max}. Но, по условию, расстояние между точками M и N должно быть минимальным. Для этого на малую дугу между точками M и N должна приходиться проволока с максимально возможным удельным сопротивлением. Это означает, что точки M и N должны располагаться симметрично относительно точки B.



И сопротивление малых дуг MB и BN должно быть равно $R_0/4$. Пусть положение точек M и N определяется углом φ_0 (см. рисунок). Тогда среднее удельное сопротивление участка BN по малой дуге равно $\rho_0 = \alpha(\pi + \varphi_0)/2$, а его сопротивление

$$R_0/4 = \rho_0(\pi - \varphi_0)r/S = \alpha(\pi^2 - \varphi_0^2)r/(2S).$$

С учётом уравнения (1) получим:

$\alpha\pi^2 r/(4S) = \alpha(\pi^2 - \varphi_0^2)r/(2S)$ или $\pi^2 = 2(\pi^2 - \varphi_0^2)$, откуда $\varphi_0 = \frac{\pi}{\sqrt{2}} = 127°$.

Расстояние L между точками M и N найдём как основание равнобедренного треугольника MON.

$$L = 2r\sin(\pi - \varphi_0) = 2r\sin\left(\pi\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right) \approx 1{,}6r\ .$$

№	**9.4. Критерии оценивания (из 12 баллов)**	**Баллы**
1	Найдено сопротивление R_0 всей проволоки, например, через $\rho_{ср}$) (2 балла за то, что найдено $\rho_{ср}$)	3
2	Показано, что точки M и N должны располагаться симметрично относительно точки B	2
3	Получено выражение для сопротивления R_{MN} кольца между точками M и N	2
4	Найдена величина сопротивления R_{MN}	2
5	Найдено расстояние L между M и N	3

9.5 Параллелограмм. На рисунке обозначены образующие параллелограмм два точечных действительных источника света и два их изображения, полученные с помощью тонкой линзы. Построением определите тип линзы, её положение, положение главной оптической оси (ГОО) и фокусов F.

9.5. Возможное решение. Обозначим точки буквами A, B, C, D, а также нанесем контуры параллелограмма и его диагоналей. Прямые проходящие через пары источник – изображение должны пересечься в оптическом центре линзы. Поэтому, пары определяются однозначно – это A–C и B–D (другие прямые параллельны и не пересекаются). Отсюда следует, что оптический центр линзы находится в точке O пересечения диагоналей параллелограмма, а источники с изображениями расположены по разные стороны от него, следовательно, изображения действительные. Это позволяет сделать вывод о типе линзы – она собирающая.

Более того, можно утверждать, что источники и их изображения находятся в плоскостях, удаленных на двойное фокусное расстояние от плоскости линзы, поскольку диагонали параллелограмма делятся в точке пересечения пополам.

Однако по данным условия невозможно однозначно определить положение линзы. Возможны 2 варианта, так как плоскости двойного фокуса могут проходить через AB и CD, а могут – через BC и AD.

Построения при этом аналогичные. Через оптический центр проводим прямую, параллельную плоскостям двойного фокуса – это будет плоскость линзы. Далее, строим перпендикуляр к плоскости линзы через оптический центр. Получаем главную оптическую ось (ГОО). Пересечение ГОО со сторонами параллелограмма дает точки двойного фокуса ($2F$). Делим расстояния между оптическим центром и двумя фокусами пополам и находим фокусы.

Возможные построения приведены на рис. 1 и рис. 2.

.

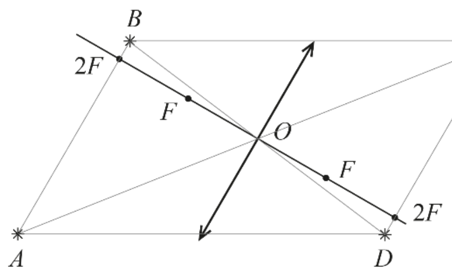


Рис. 1

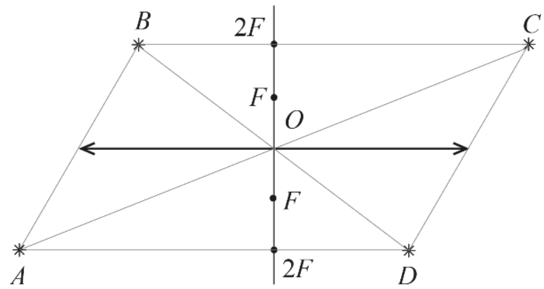


Рис. 2

№	9.5. Критерии оценивания (из 12 баллов)	Баллы
1	Определён тип линзы	1
2	Указано, что источники и изображения находятся на расстоянии $2F$ от линзы	2
3	Указано, что возможны 2 варианта расположения линзы	1
	Выполнено построение для первого случая	
4	Найдено положение линзы	2
5	Найдено положение ГОО	1
6	Найдено положение фокусов	1
	Выполнено построение для второго случая	
7	Найдено положение линзы	2
8	Найдено положение ГОО	1
9	Найдено положение фокусов	1