Материалы для проведения регионального этапа

XLVIII ВСЕРОССИЙСКОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ

2021–2022 учебный год

Первый день

4–5 февраля 2022 г.

Москва, 2022

Сборник содержит материалы для проведения III этапа XLVIII Всероссийской олимпиады школьников по математике. Задания подготовлены Центральной предметно-методической комиссией по математике Всероссийской олимпиады школьников.

Сборник составили: Н. Х. Агаханов, А. В. Антропов, С. Л. Берлов, И. И. Богданов, М. А. Дидин, К. А. Кноп, П. А. Кожевников, П. Ю. Козлов, А. С. Кузнецов, О. К. Подлипский, К. А. Сухов, И. И. Фролов, А. И. Храбров, Д. Г. Храмцов, Г. Р. Челноков.

В скобках после каждой задачи указана фамилия её автора.

Рецензент: д.ф.-м.н. Р. Н. Карасёв.

Компьютерный макет: И. И. Богданов, А. И. Голованов.

Введение

Порядок проведения, методика и система оценивания (проверки) регионального этапа Всероссийской олимпиады школьников по математике 2021–2022 учебного года.

Региональный этап Всероссийской олимпиады школьников по математике 2021–2022 учебного года проводится по заданиям, подготовленным Центральной предметно-методической комиссией, в единые для всех субъектов РФ сроки: **4 февраля 2022 г.** (I тур) и **5 февраля 2022 г.** (II тур). Региональный этап проводится по отдельным заданиям для учащихся 9, 10 и 11 классов.

Задания для каждого класса включают 10 задач — по 5 задач в каждом из двух дней (туров) Олимпиады (задачи 1–5 — I тур, задачи 6–10 — II тур). Продолжительность каждого тура для каждого класса составляет 3 часа 55 минут.

В силу того, что во всех субъектах Российской Федерации региональный этап проводится по одним и тем же заданиям, подготовленным Центральной предметно-методической комиссией, в целях предотвращения преждевременного доступа к текстам заданий со стороны участников Олимпиады, а также их учителей и наставников, время начала и окончания туров в установленные даты в каждом субъекте РФ должно определяться в соответствии с **«Временны́ми регламентами проведения туров регионального этапа Всероссийской олимпиады школьников в субъектах Российской Федерации в 2021–2022 учебном году»** для часовых поясов.

Разбор задач в субъектах Российской Федерации, где тур оканчивается в 16.00 и 17.00 по местному времени, проводится не раньше, чем на следующий день после проведения второго тура Олимпиады.

Решение каждой задачи оценивается целым числом баллов от 0 до 7. Максимальное количество баллов, которое может получить участник, равно 70 (35 — I тур, 35 — II тур).

Задания математических олимпиад являются творческими, допускают несколько различных вариантов решений. Кроме того, необходимо оценивать частичные продвижения в задачах (например, разбор важного случая, доказательство вспомогательного утверждения, нахождение примера и т. п.). Наконец, возможны логические и арифметические ошибки в решениях. Окончательные баллы по задаче должны учитывать всё вышеперечисленное.

Проверка работ осуществляется в соответствии со следующими правилами:

а) любое правильное решение оценивается в 7 баллов. Недопустимо снятие баллов за то, что решение слишком длинное, или за то, что решение школьника отличается от приведённого в методических разработках;

б) недопустимо снятие баллов в работе за неаккуратность записи решений;

в) баллы не выставляются «за старание Участника», в том числе за запись в работе большого по объёму текста, не содержащего продвижений в решении задачи;

г) черновики не проверяются.

В связи с необходимостью качественной оценки работ участников, на их проверку выделяется до 7 дней.

Для единообразия оценки работ участников олимпиады из разных регионов и с целью исключения при этом ошибок, Центральная предметно-методическая комиссия имеет право перепроверки работ участников регионального этапа.

В случае отсутствия специальных критериев по задаче, её решение оценивается по приведённой ниже таблице (отметим, что для исключения различий в оценке близких продвижений по задаче в работах разных участников, таблица упрощена по сравнению с приведённой в Требованиях по проведению регионального этапа).

Баллы	**Правильность (ошибочность) решения**
7	Полное верное решение.
6–7	Верное решение. Имеются небольшие недочёты (не логические), в целом не влияющие на решение.
до 4	В задаче типа «Оценка+пример» доказана оценка.
до 3	В задаче типа «Оценка+пример» построен пример.
до 1	Рассмотрен важный случай при отсутствии решения.
0	Аналитическое (координатным или векторным методом) решение геометрической задачи, не доведённое до конца.
0	Решение отсутствует. Решение неверное, продвижения отсутствуют.

Ниже приведены ответы и решения к задачам олимпиады. В комментариях к задачам указаны критерии оценивания (в баллах) некоторых предполагаемых ошибок и частичных продвижений. Заметим, что работа участника, помимо приведённых, может включать другие содержательные продвижения и ошибки, которые должны быть оценены дополнительно.

Желаем успешной работы!

Авторы и составители сборника

10 класс

10.1. Петя написал на доске десять натуральных чисел, среди которых нет двух равных. Известно, что из этих десяти чисел можно выбрать три числа, делящихся на 5. Также известно, что из написанных десяти чисел можно выбрать четыре числа, делящихся на 4. Может ли сумма всех написанных на доске чисел быть меньше 75? (*П. Кожевников*)

Ответ. Может.

Решение. Пример: $1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 20$. В этом наборе три числа $(5, 10, 20)$ делятся на 5, четыре числа $(4, 8, 12, 20)$ делятся на 4, а общая сумма равна 71.

Замечание. Можно доказать (но, конечно, в задаче этого не требуется), что на самом деле в любом примере, удовлетворяющем условию задачи, должны обязательно присутствовать числа $1, 2, 3, 4, 5, 8, 10, 12$ и 20, а вместо числа 6 можно взять 7 или 9.

Комментарий. Для получения полного балла (7 баллов за задачу) достаточно наличие верного примера без указания, какие числа делятся на 4 и 5, явный подсчёт суммы тоже не требуется. Любой неработающий пример оценивается в 0 баллов.

10.2. Дан квадратный трехчлен $P(x)$. Докажите, что существуют попарно различные числа a, b и c такие, что выполняются равенства

$$P(b+c) = P(a), \quad P(c+a) = P(b), \quad P(a+b) = P(c).$$

(*Н. Агаханов*)

Решение. Пусть d — абсцисса вершины параболы $y = P(x)$, так что прямая $x = d$ — ось симметрии параболы. Тогда для любых чисел t и s с суммой $2d$ (т.е. таких, что точки t и s симметричны относительно d) выполнено $P(t) = P(s)$. Таким образом, любая тройка попарно различных чисел a, b, c таких, что $a + b + c = 2d$, будет удовлетворять условию задачи. Можно взять, скажем, $a = \frac{2d}{3} - 1$, $b = \frac{2d}{3}$, $c = \frac{2d}{3} + 1$.

Комментарий. За использование (очевидного) факта, что существует тройка (или пара) попарно различных чисел с заданной суммой, баллы не снижаются.

Сформулировано условие, эквивалентное равенству $P(s) = P(t)$, т.е. показано, что $P(s) = P(t)$ означает $t = s$ или $t + s = 2d$ (иначе говоря, точки t и s симметричны относительно оси параболы) — 3 балла.

10.3. У Васи есть n конфет нескольких сортов, где $n \geqslant 145$. Известно, что если из данных n конфет выбрать любую группу, содержащую не менее 145 конфет (в частности, можно выбрать группу из всех данных n конфет), то существует такой сорт конфет, что выбранная группа содержит в точности 10 конфет этого сорта. Найдите наибольшее возможное значение n. (*А. Антропов*)

Ответ. 160.

Решение. *Оценка.* Докажем, что $n > 160$ «не работает».

Пусть дан набор из n конфет. Назовем сорт *критическим*, если конфет этого сорта ровно 10 (среди всех данных n конфет). Пусть у нас k критических сортов, тогда всего конфет не менее $10k$: $n \geqslant 10k$. Уберем по одной конфете каждого критического сорта и организуем группу из оставшихся $n - k$ конфет. Для этой группы нет сорта, представленного ровно 10 конфетами. Кроме того, $n - k \geqslant n - \frac{n}{10} = \frac{9n}{10} > \frac{9 \cdot 160}{10} = 144$. Значит, в рассматриваемой группе не менее 145 конфет, поэтому условие задачи не выполняется.

Пример. Теперь приведём пример ситуации, в которой у Васи может быть 160 конфет. Пусть у него есть ровно по 10 конфет 16 сортов. Пусть выбрана группа, для которой нет сорта, представленного ровно 10 конфетами. Тогда в эту группу не входит хотя бы одна конфета каждого сорта (иначе говоря, ни один сорт не будет взят полностью), т.е. группа содержит не более $16 \cdot 9 = 144$ конфет, значит, условие задачи выполнено.

Замечание 1. Оценка $n \leqslant 160$ может быть доказана также следующим, несколько другим способом. Предположим, что некоторое $n = 145 + m$ «работает», т.е. существует набор K_0 из n конфет, удовлетворяющий условию задачи. Тогда в наборе K_0 есть в точности 10 конфет некоторого сорта A_0. Уберем конфету a_0 сорта A_0 и рассмотрим группу K_1 из оставшихся $n - 1$ конфет. В группе K_1 есть в точности 10 конфет некоторого сорта A_1, при этом сорт A_1 отличен от A_0, так как в K_1 есть ровно 9 конфет сорта A_0. Уберем из K_1 конфету a_1 сорта A_1 и рассмотрим группу K_2 из оставшихся $n-2$ конфет, в котором найдем 10 конфет нового сорта A_3, и т.д., продолжим по шагам убирать по одной конфете и рассматривать группы оставшихся конфет. Так дойдем до группы K_m, состоящей из $|K_m| = 145$ конфет. При этом, согласно нашему алгоритму, K_0 содержит по 10 конфет сортов $A_0, \ldots, A_m$, значит $|K_0| \geqslant 10(m+1)$. Имеем $145 + m \geqslant 10(m+1)$, откуда $m \leqslant 15$ и $n \leqslant 160$.

Замечание 2. Пример при $n = 160$ единственный.

Комментарий. Баллы за оценку и пример суммируются.

Имеется только верный ответ без обоснований — 0 баллов.

Имеется верный пример для $n = 160$ и обоснование, что условие задачи для этого примера выполняется — 3 балла (в случае, когда верный пример предъявлен, но обоснование отсутствует, снимается 1 балл, т.е. ставится 2 балла вместо 3).

Имеется верное и полное доказательство оценки $n \leqslant 160$ — 4 балла (при наличии пробелов в доказательстве оценки баллы могут быть снижены до 3 или 2 баллов).

10.4. Пусть $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, где n — натуральное число. Известно, что числа $a_0, a_1, \ldots, a_n$ — целые, при этом $a_n \neq 0$, $a_{n-k} = a_k$ при всех $k = 0, 1, \ldots, n$, и $a_n + a_{n-1} + \ldots + a_1 + a_0 = 0$. Докажите, что число $P(2022)$ делится на квадрат некоторого натурального числа, большего 1. (*Е. Холмогоров*)

Решение. Достаточно доказать *утверждение*: многочлен $P(x)$ делится на $(x-1)^2$. Действительно, после деления (например, столбиком), в частном получится многочлен $Q(x)$ с целыми коэффициентами, и тогда равенство многочленов $P(x) = (x-1)^2 Q(x)$ влечет равенство $P(2022) = 2021^2 \cdot Q(2022)$, из которого следует утверждение задачи, поскольку $Q(2022)$ — целое число.

Для доказательства утверждения сделаем замену $t = x - 1$, положим $R(t) = P(t+1) = a_n(t+1)^n + a_{n-1}(t+1)^{n-1} + \ldots + a_1(t+1) + a_0$ и докажем, что $R(t)$ делится на t^2, т.е. что последние два коэффициента многочлена $R(t)$ равны 0.

Свободный член многочлена R равен $R(0) = a_n + a_{n-1} + \ldots + a_0 = 0$.

Поскольку в многочлене $(t+1)^k$ коэффициент при t равен

k, коэффициент при t многочлена R равен $na_n + (n-1)a_{n-1} + \ldots + a_1$. Из условий $a_{n-k} = a_k$ следует, что удвоенный коэффициент при t равен $(na_n + (n-1)a_{n-1} + \ldots + a_1) + (na_0 + (n-1)a_1 + \ldots + a_{n-1}) = n(a_n + a_{n-1} + \ldots + a_0) = 0$.

Тем самым, задача решена.

Замечание. Утверждение о делимости $P(x)$ на $(x-1)^2$ можно доказать несколькими другими способами. Например:

1) Можно доказать, что при делении $P(x)$ на $x-1$ мы получаем многочлен $Q(x) = b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \ldots + b_1x + b_0$ такой, что $b_{n-1-k} = -b_k$ при всех $0 \leqslant k \leqslant n-1$. Отсюда последует $Q(1) = 0$, и тогда, в силу теоремы Безу, $Q(x)$ делится на $(x-1)$.

2) Можно заметить, что $P(1) = 0$ и $P'(1) = 0$.

Комментарий. Доказано, что многочлен $P(x)$ делится на $x-1$ (или, эквивалентно, что $P(1) = 0$) и/или что $P(2022)$ делится на 2021 — 1 балл.

Если при этом утверждается (но не доказано), что многочлен $P(x)$ делится на $(x-1)^2$ (или, эквивалентно, что $P(1) = P'(1) = 0$) и/или что $P(2022)$ делится на 2021^2 (или 43^2, или 47^2) — 2 балла.

Факт «если многочлен P делится на многочлен Q, причём у P и Q коэффициенты целые, а у Q старший коэффициент равен 1, то в частном получается многочлен с целыми коэффициентами», считается известным, и за использование этого факта без доказательства баллы не снимаются.

10.5. В окружность Ω вписан шестиугольник $AECDBF$. Известно, что точка D делит дугу BC пополам, а треугольники ABC и DEF имеют общую вписанную окружность. Прямая BC пересекает отрезки DF и DE в точках X и Y, а прямая EF пересекает отрезки AB и AC в точках Z и T соответственно. Докажите, что точки X, Y, T, Z лежат на одной окружности. (*Д. Бродский*)

Решение. Отметим точку I — центр общей вписанной окружности ω треугольников ABC и DEF. Поскольку D — середина дуги BC, точки A, I, D лежат на одной прямой. Окружность ω вписана в угол $\angle FDE$, поэтому DI — биссектриса угла $\angle FDE$, а точка A — середина дуги FE.

Заметим, что четырёхугольник $FEYX$ вписанный. Это сле-

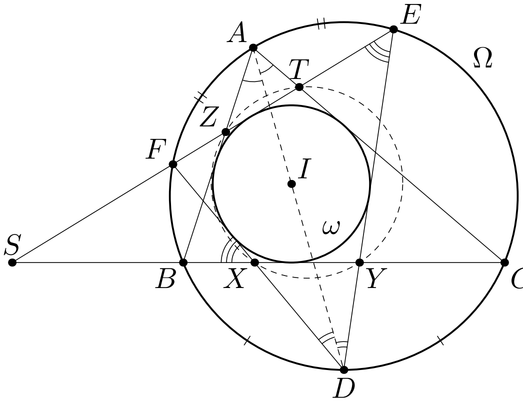

Рис. 3

дует из равенства углов $\angle FED = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{FB} + \overset{\frown}{BD}) = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{FB} + \overset{\frown}{CD}) = \angle FXB$. Аналогично, четырёхугольник $BCTZ$ — вписанный.

Если $BC \parallel EF$, то конструкция симметрична относительно прямой AD, и утверждение задачи очевидно. Иначе отметим точку S пересечения прямых FE и BC. Приравнивая произведения отрезков секущих для окружностей Ω, $(BCTZ)$ и $(FEYX)$ (т.е. степени точки S относительно этих трех окружностей), имеем: $SX \cdot SY = SF \cdot SE = SB \cdot SC = SZ \cdot ST$. Доказанное равенство $SX \cdot SY = SZ \cdot ST$ означает, что X, Y, Z, T лежат на одной окружности, что и требовалось доказать.

Комментарий. Если в верном решении не рассмотрен случай $BC \parallel EF$, то баллы не снижаются. Если рассмотрен только этот случай, баллы не начисляются.

Оцениваются (и суммируются) следующие продвижения.

Доказано, что A — середина дуги FE — 1 балл.

Доказано, что $BCTZ$ и/или $FEYX$ — вписанный — 1 балл.

Введена в рассмотрение точка $S = BC \cap EF$ и записано равенство произведений длин секущих хотя бы для одной из окружностей Ω, $(BCTZ)$ и $(FEYX)$ — 1 балл.