Муниципальный этап Всероссийской олимпиады
по математике

Решения задач

Москва, декабрь 2021

В 7 и 8 классах участникам отводилось 90 минут на решение олимпиады, а в 9, 10 и 11 классах — 120 минут.

Для каждого номера задания составители подготовили несколько версий задач. Под каждым номером участнику случайным образом выдавалась одна из версий. Таким образом, у каждого школьника был свой вариант олимпиады. Далее для каждого номера приведена только одна версия задачи с решением.

Содержание

7 класс **2**
7.1 7.2 7.3 7.4 7.5 7.6 7.7 7.8

8 класс **8**
8.1 8.2 8.3 8.4 8.5 8.6 8.7 8.8

9 класс **17**
9.1 9.2 9.3 9.4 9.5 9.6 9.7 9.8

10 класс **25**
10.1 10.2 10.3 10.4 10.5 10.6 10.7 10.8

11 класс **32**
11.1 11.2 11.3 11.4 11.5 11.6 11.7 11.8

11 класс

Задача 11.1. По кругу выписаны 12 *различных* натуральных чисел, одно из которых равно 1. Любые два соседних числа отличаются либо на 10, либо на 7. Какое наибольшее значение может принимать наибольшее выписанное число?

Ответ: 58.

Решение. Пронумеруем для удобства все числа по кругу по часовой стрелке, начиная с числа 1: $a_1 = 1, a_2, \ldots, a_{12}$. Заметим, что для всех $1 \leqslant i \leqslant 6$ верно

$$a_{i+1} - a_1 = (a_{i+1} - a_i) + (a_i - a_{i-1}) + \ldots + (a_2 - a_1) \leqslant 10i,$$

$$a_{13-i} - a_1 = (a_{13-i} - a_{14-i}) + \ldots + (a_{12} - a_1) \leqslant 10i,$$

поэтому a_7 не превосходит $1+6\cdot10 = 61$, а все остальные числа не превосходят $1+5\cdot10 = 51$.

Если $a_7 = 61$, то все разности $a_2 - a_1, a_3 - a_2, \ldots, a_7 - a_6, a_7 - a_8, a_8 - a_9, \ldots, a_{12} - a_1$ равны 10, но тогда $a_2 = a_{12} = 11$, противоречие. Значит, $a_7 < 61$, откуда следует, что $a_7 \leqslant 1 + 5 \cdot 10 + 7 = 58$. Итак, наибольшее выписанное число не превосходит 58.

Осталось проверить, что на доске действительно может присутствовать число 58. Пусть по кругу по часовой стрелке выписаны числа 1, 11, 21, 31, 41, 51, 58, 48, 38, 28, 18, 8.

1

8 11

18 21

28 31

38 41

48 51

58

Легко видеть, что все условия задачи выполняются. □

Задача 11.2. Пусть α и β — действительные корни уравнения $x^2 - x - 2021 = 0$, причём $\alpha > \beta$. Обозначим

$$A = \alpha^2 - 2\beta^2 + 2\alpha\beta + 3\beta + 7.$$

Найдите наибольшее целое число, не превосходящее A.

Ответ: -6055.

Решение. По теореме Виета имеем $\alpha + \beta = 1$ и $\alpha\beta = -2021$. Также $\beta^2 - \beta - 2021 = 0$, поскольку β — корень уравнения. Значит,

$A = \alpha^2 - 2\beta^2 + 2\alpha\beta + 3\beta + 7 = (\alpha+\beta)^2 - 3(\beta^2 - \beta - 2021) - 6063 + 7 = 1^2 - 3\cdot 0 - 6063 + 7 = -6055$, поэтому и ответом в задаче является число -6055.

То, что $\alpha > \beta$, мы не использовали. □

Задача 11.3. Пусть k_1 — наименьшее натуральное число, являющееся корнем уравнения

$$\sin k^\circ = \sin 334k^\circ.$$

(а) *(2 балла)* Найдите k_1.

(б) *(2 балла)* Найдите наименьший корень этого же уравнения, являющийся натуральным числом, большим k_1.

Ответ:

(а) *(2 балла)* 36.

(б) *(2 балла)* 40.

Решение.

$$0 = \sin 334k^\circ - \sin k^\circ = 2\sin\frac{333k^\circ}{2}\cos\frac{335k^\circ}{2}.$$

- Пусть $\sin\frac{333k^\circ}{2} = 0$. Это равносильно тому, что $\frac{333k}{2} = 180m$ для некоторого целого m, то есть $333k = 360m$ и $37k = 40m$. Поскольку числа k — натуральное, то k делится на 40, то есть $k \geqslant 40$. Ясно также, что $k = 40$ является корнем (ему соответствует $m = 37$).
- Пусть $\cos\frac{335k^\circ}{2} = 0$. Это равносильно тому, что $\frac{335k}{2} = 90 + 180n$ для некоторого целого n, то есть $335k = 360n + 180$ и $67k = 36(2n+1)$. Поскольку число k— натуральное, то k делится на 36, то есть $k \geqslant 36$. Ясно также, что $k = 36$ является корнем (ему соответствует $m = 33$). Следующий по величине корень в этой серии решений больше 40.

  Итак, наименьший натуральный корень исходного уравнения равен 36, а следующий по величине — 40. □

Задача 11.4. В спортивной школе занимается 55 человек, каждый из которых либо теннисист, либо шахматист. Известно, что нет четырёх шахматистов, которые имели бы поровну друзей среди теннисистов. Какое наибольшее количество шахматистов может заниматься в этой школе?

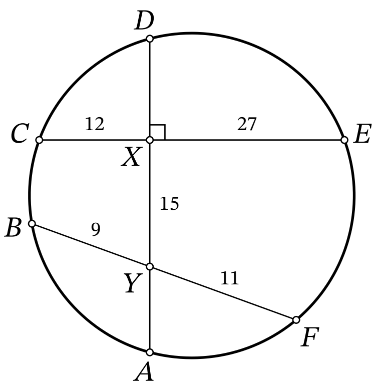
Ответ: 42.

Решение. Пусть в школе занимаются a теннисистов и $55 - a$ шахматистов. У каждого из шахматистов количество друзей-теннисистов не меньше 0 и не больше a, то есть может принимать $a+1$ значений. Если бы шахматистов было больше $3(a+1)$, среди них по принципу Дирихле нашлись четверо с одинаковым количеством друзей-теннисистов. Значит, шахматистов не больше $3(a + 1)$, получаем неравенство $55 - a \leqslant 3(a + 1)$. Решая его, получаем $a \geqslant 13$, тогда $55 - a \leqslant 55 - 13 = 42$.

Заметим также, что ровно 42 шахматиста могло быть: пусть для каждого целого $0 \leqslant k \leqslant 13$ какие-то трое шахматистов имеют ровно k произвольных друзей-теннисистов. $\square$

Задача 11.5. На окружности по часовой стрелке расположены точки A, B, C, D, E, F, как изображено на рисунке. Хорды AD и CE пересекаются в точке X под прямым углом, хорды AD и BF пересекаются в точке Y.

Известно, что $CX = 12$, $XE = 27$, $XY = 15$, $BY = 9$, $YF = 11$.



(а) *(2 балла)* Найдите длину отрезка AD.

(б) *(2 балла)* Найдите радиус окружности.

Ответ:

(а) *(2 балла)* 36.

(б) *(2 балла)* 19,5.

Решение. Пусть $AY = a$, $XD = b$ (рис. 8). Воспользуемся тем, что произведения отрезков секущих хорд, проведённых через данную точку внутри окружности, равны. Это означает, что $324 = 12 \cdot 27 = a(15+b)$ и $99 = 9 \cdot 11 = b(a+15)$. Вычитая из первого уравнения второе, получаем $225 = 15(a-b)$, то есть $a - b = 15$. Тогда $18^2 = 324 = a(15+b) = (15+b)^2$, откуда получаем $18 = 15 + b$ и $b = 3$. Следовательно, $a = 18$ и $AD = a + 15 + b = 3 + 15 + 18 = 36$.

Итак, $AX = XD = 18$. Центр окружности лежит на серединном перпендикуляре к хорде AD, то есть на отрезке CE. Значит, CE — диаметр данной окружности, поэтому её радиус

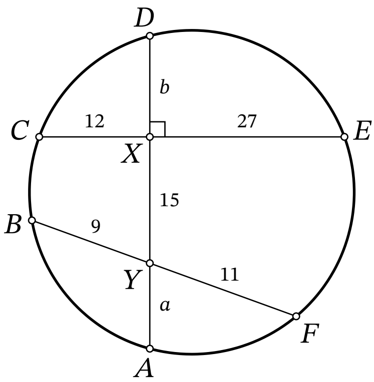


Рис. 8: к решению задачи 11.5

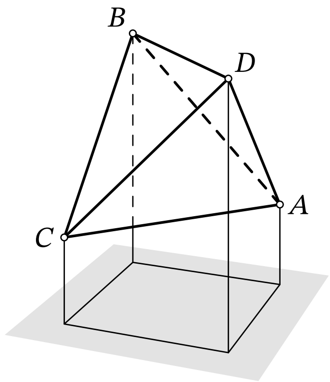
равен $\frac{1}{2}CE = \frac{1}{2}(12 + 27) = 19{,}5$. □

Задача 11.6. Дан набор чисел $\{-1, -2, -3, \ldots, -26\}$. На доску выписали всевозможные подмножества данного набора, в которых есть хотя бы 2 числа. Для каждого выписанного подмножества вычислили произведение всех чисел, принадлежащих данному подмножеству. Чему равна сумма всех этих произведений?

Ответ: 350.

Решение. Рассмотрим выражение $(1-1)(1-2)(1-3)\ldots(1-26)$, значение которого равно 0. Раскроем в этом выражении все скобки, не приводя подобные слагаемые, получится сумма $1^{26} - 1^{25}(1+2+3+\ldots+26)+S$. Заметим, что сумма S совпадает с суммой из условия задачи. Значит, она равна $0 - 1 + (1 + 2 + 3 + \ldots + 26) = 350$. □

Задача 11.7. Все вершины правильного тетраэдра $ABCD$ находятся по одну сторону от плоскости α. Оказалось, что проекции вершин тетраэдра на плоскость α являются вершинами некоторого квадрата. Найдите значение величины AB^2, если известно, что расстояния от точек A и B до плоскости α равны 17 и 21 соответственно.



Ответ: 32.

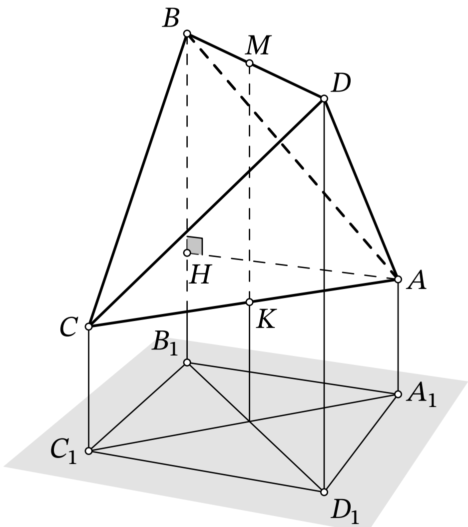


Рис. 9: к решению задачи 11.7

Решение. Пусть A_1, B_1, C_1, D_1 — проекции точек A, B, C, D на плоскость α. Пусть M — середина отрезка BD, K — середина отрезка AC (рис. 9). Проекции точек M и K на плоскость α являются серединами отрезков B_1D_1 и A_1C_1, то есть совпадают. Следовательно, прямая MK перпендикулярна плоскости α. Также она перпендикулярна прямой AC (отрезки AM и CM равны как медианы равных треугольников ABD и CBD, поэтому медиана MK равнобедренного треугольника AMC также является его высотой), поэтому $AC \parallel \alpha$. Значит, AA_1C_1C — прямоугольник и $A_1C_1 = AC$.

Пусть сторона квадрата $A_1B_1C_1D_1$ равна x, тогда по теореме Пифагора $A_1C_1^2 = 2x^2$. Опустим перпендикуляр AH на прямую BB_1. Ясно, что AA_1B_1H — прямоугольник, поэтому

$AA_1 = HB_1 = 17$ и $AH = A_1B_1 = x$. Также $BH = BB_1 - HB_1 = 21 - 17 = 4$. По теореме Пифагора для треугольника ABH имеем $AB^2 = 16 + x^2$. Следовательно,

$$16 + x^2 = AB^2 = AC^2 = A_1C_1^2 = 2x^2,$$

откуда находим $x = 4$. Тогда $AB^2 = 2 \cdot 4^2 = 32$. □

Задача 11.8. В каждой клетке полоски $1 \times N$ стоит либо плюс, либо минус. Ваня умеет совершать следующую операцию: выбрать любые три клетки (не обязательно последовательные), одна из которых находится ровно посередине между двумя другими клетками, и поменять три знака в этих клетках на противоположные. Число N назовём *позитивным*, если из расстановки из N минусов Ваня такими операциями может получить расстановку из N плюсов.

Рассмотрим числа $3, 4, 5, \ldots, 1400$. Сколько среди них позитивных?

Ответ: 1396.

Решение. Докажем, что позитивными являются все рассматриваемые числа, кроме 4 и 5. Тогда ответом в задаче будет являться $1398 - 2 = 1396$.

Для каждого N пронумеруем клетки полоски $1 \times N$ слева направо числами от 1 до N.

- Пусть $N = 3$. Применив операцию к клеткам с номерами $(1, 2, 3)$, сразу получаем расстановку из одних плюсов.
- Пусть $N = 6$. Применив операции к клеткам с номерами $(1, 2, 3)$ и к клеткам с номерами $(4, 5, 6)$, сразу получаем расстановку из одних плюсов.
- Пусть $N = 7$. Применив операции к клеткам с номерами $(1, 4, 7)$, к клеткам с номерами $(2, 3, 4)$ и к клеткам с номерами $(4, 5, 6)$, сразу получаем расстановку из одних плюсов.
- Пусть $N \geqslant 8$. Применив операции к клеткам с номерами $(N, N-1, N-2)$, к клеткам с номерами $(N-3, N-4, N-5)$ и так далее, можно добиться того, чтобы плюсы стояли во всех клетках полоски, кроме, возможно, клеток с номерами 1 и 2. Если в клетке с номером 2 стоит минус, применим операции к клеткам с номерами $(2, 5, 8)$, $(5, 6, 7)$, $(6, 7, 8)$, получим, что во всех клетках с номерами от 2 до N включительно стоят плюсы. Если в клетке с номером 1 стоит минус, применим операции к клеткам с номерами $(1, 4, 7)$, $(4, 5, 6)$, $(5, 6, 7)$. Итак, мы добились расстановки из одних плюсов.
- Пусть $N = 4$. Операции можно применять только к клеткам с номерами $(1, 2, 3)$ или $(2, 3, 4)$. Ясно, что таким образом мы можем получать только расстановки $----$, $+++-$, $-+++$, $+--+$, и расстановку из одних плюсов получить невозможно.
- Пусть $N = 5$. Операции можно применять только к клеткам с номерами $(1, 2, 3)$, $(2, 3, 4)$, $(3, 4, 5)$, $(1, 3, 5)$. Заметим, что в клетках с номерами $2, 3, 5$ всегда находит-

ся суммарно нечётное количество минусов, поэтому расстановку из одних плюсов получить невозможно. $\square$