Условия и решения задач

9 класс

9.1. Назовём *главными делителями* составного числа n два наибольших его натуральных делителя, отличных от n. Составные натуральные числа a и b таковы, что главные делители числа a совпадают с главными делителями числа b. Докажите, что $a = b$.

(*А.С. Голованов*)

Решение. Пусть $n > k$ — главные делители числа a; тогда a/n и a/k — два наименьших делителя числа a, бо́льших единицы. Пусть p — наименьший простой делитель числа a, а q — наименьший простой делитель a, кроме p (если такой существует). Тогда $a/n = p$. Далее, a/k — либо простое число (тогда это q), либо составное. Во втором случае единственным простым делителем числа a/k является p, и потому $a/k = p^2$; этот случай реализуется ровно тогда, когда a делится на p^2, причём $p^2 < q$ или q не существует.

Итак, главные делители числа a — это либо a/p и a/q, либо a/p и a/p^2. Покажем теперь, что по двум главным делителям $n > k$ составное число a восстанавливается однозначно (откуда и следует требуемое). Если n кратно k, то выполнен второй случай, и тогда $a = n^2/k$. Иначе выполнен первый случай, и тогда $a = \text{НОК}(n, k)$.

9.2. Биссектрисы треугольника ABC пересекаются в точке I, внешние биссектрисы его углов B и C пересекаются в точке J. Окружность ω_b с центром в точке O_b проходит через точку B и касается прямой CI в точке I. Окружность ω_c с центром в точке O_c проходит через точку C и касается прямой BI в точке I. Отрезки O_bO_c и IJ пересекаются в точке K. Найдите отношение IK/KJ.

(*Л. Емельянов, И. Богданов*)

Ответ. 1/3.

Первое решение. Проведём в окружности ω_b диаметр IX, а в окружности ω_c — диаметр IY. Заметим, что $\angle IBJ = 90^\circ = \angle ICJ$, поскольку внутренняя и внешняя биссектриса угла перпендикулярны. Следовательно, точка X лежит на BJ, а точка Y — на CJ (см. рис. 1). Кроме того, $IX \perp IC$, поскольку ω_b касается IC в точке I, поэтому $IX \parallel CJ$. Аналогично, $IY \parallel BJ$. Итого, четырёхугольник $IXJY$ — параллелограмм, пусть его диагонали пересекаются в точке M. Тогда $IM = MJ$, а отрезок O_bO_j — средняя линия треугольника IXY, поэтому точка K — середина отрезка IM. Таким образом, $IK = IM/2 = IJ/4$, откуда следует, что $IK/KJ = 1/3$.

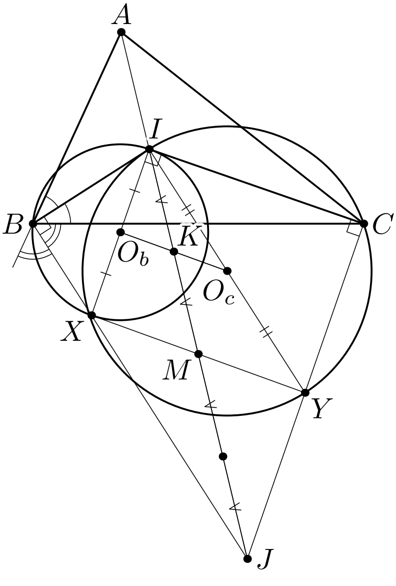

Рис. 1

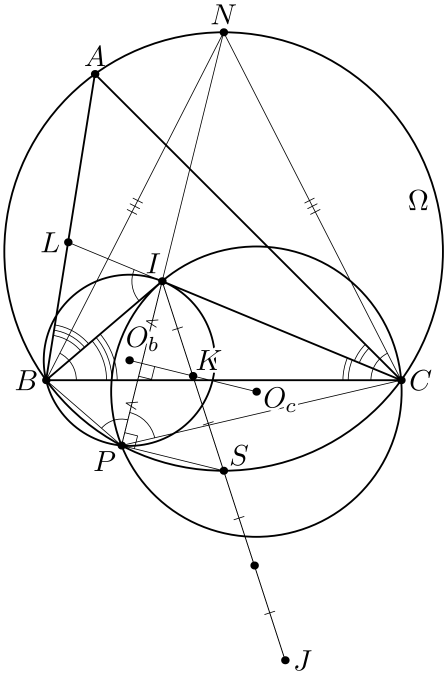

Рис. 2

Второе решение. Обозначим через N середину дуги BAC описанной окружности Ω треугольника ABC, а через S — середину другой её дуги BC. Пусть луч NI вторично пересекает Ω в точке P (см. рис. 2). Поскольку SN — диаметр окружности (ABC), то $\angle NPS = 90^\circ$.

По известной лемме о трезубце имеем $SI = SC = SJ$, в частности, S — середина отрезка IJ. Поскольку $\angle BAC = \angle BNC$ и $BN = NC$, то $\angle NBC = \angle NCB = \frac{1}{2}\angle ABC + \frac{1}{2}\angle ACB$.

Продлим луч CI до пересечения с AB в точке L. Так как $\angle LIB$ внешний для треугольника BIC, а также четырёхугольник $BNCP$ — вписанный, мы получаем, что $\angle LIB = \angle IBC + \angle ICB = \frac{1}{2}\angle ABC + \frac{1}{2}\angle ACB = \angle NCB = \angle IPB$, поэтому окружность (IBP) касается прямой CI в точке I. Также эта окружность проходит через B, следовательно, это и есть окружность ω_b. Аналогично, окружность ω_c описана около треугольника IPC.

Значит, IP — общая хорда окружностей ω_b и ω_c, а тогда O_bO_c — серединный перпендикуляр к отрезку IP. Поскольку к тому же $\angle IPS = 90^\circ$, мы получаем, что O_1O_2 проходит через середину отрезка IS, то есть $KI = KS$, а тогда $IK/KJ = 1/3$.

Замечание. Точка S во втором решении совпадает с точкой M из первого решения.

9.3. В строку выписаны 200 натуральных чисел. Среди любых двух соседних чисел строки правое либо в 9 раз больше левого, либо в 2 раза меньше левого. Может ли сумма всех этих 200 чисел равняться 24^{2022}? (*О. Подлипский, И. Богданов*)

Ответ. Не может.

Решение. Пусть строка состоит из чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{200}$ в этом порядке. Если число $a_i = 2k$ чётно, то следующим за ним может быть число k или число $18k$; эти числа дают одинаковые остатки при делении на 17. Если же a_i нечётно, то $a_{i+1} = 9a_i$. В любом случае получаем, что $a_i \equiv 2a_{i+1} \pmod{17}$.

Таким образом, полагая $a = a_{200}$, получаем, что с точки зрения остатков при делении на 17 строка устроена так же, как и строка $2^{199}a,\ 2^{198}a,\ \ldots,\ 2a,\ a$. Сумма всех членов этой новой строки равна $(2^{200} - 1)a$. В частности, она делится на $2^8 - 1 = 15 \cdot 17$, то есть делится на 17. Поэтому и сумма чисел в исходной строке делится на 17, и она не может равняться 24^{2022}.

Замечание. Доказать, что сумма всех чисел в строке делится на 17, можно и по-другому. Можно, например, разбить строку на восьмёрки подряд идущих чисел и заметить, что сумма чисел восьмёрки, заканчивающейся числом a, сравнима с $(2^8 - 1)a = 17 \cdot 15a$.

Также можно рассуждать следующим образом. Каждое следующее число в строке получается из предыдущего одной из следующих операций: делением на 2 или умножением на 9. Отметим, что перестановка местами этих операций не меняет остатка от деления суммы всех чисел на 17 (действительно, после такой замены фрагмент строки $2k, 18k, 9k$ заменяется на фрагмент $2k, k, 9k$). Тогда можно переставить операции так, чтобы сначала шли деления на 2, а потом умножения на 9.

Если при этом происходит $n-1$ деление на 2, а затем $200-n$ умножений на 9, то строка состоит из чисел $2^{n-1}a$, $2^{n-2}a$, $\ldots$, $2a$, a, $9a$, $81a$, $\ldots$, $9^{200-n}a$. Сумма всех этих чисел равна

$$a(2^n-1)+9a\cdot\frac{9^{200-n}-1}{8}=\frac{a}{8}\cdot(2^{n+3}+9^{201-n}-17).$$

После этого достаточно проверить, что число 2^i+9^j делится на 17, если $i+j$ даёт остаток 4 при делении на 8. Это можно сделать, например, перебором остатков от деления на 8 с учётом того, что $2^8-1=15\cdot 17\equiv 0 \pmod{17}$ и $9^8-1\equiv(-4)^4-1=2^8-1\equiv 0$ (mod 17).

9.4. В классе 18 детей. Родители решили подарить детям из этого класса торт. Для этого они сначала узнали у каждого ребёнка площадь куска, который он хочет получить. После этого они заказали торт квадратной формы, площадь которого в точности равна сумме 18 названных чисел. Однако, увидев торт, дети захотели, чтобы их куски тоже были квадратными. Родители могут резать торт разрезами, параллельными сторонам торта (разрезы не обязаны начинаться или оканчиваться на стороне торта). Для какого наибольшего k родители гарантированно могут вырезать из заказанного торта k квадратных кусков, которые можно выдать k детям, чтобы каждый из них получил желаемое? (*А. Ибрагимов, И. Богданов*)

Ответ. $k=12$.

Решение. Мы всегда считаем, что площадь торта равна 1.

Покажем, что при некоторых запросах детей родители не смогут вырезать более 12 требуемых кусков. Выберем число $1/15 > x > 1/16$. Предположим, что 15 *главных* детей заказали по куску торта площади x (а остальные трое сделали произвольные заказы так, чтобы суммарная площадь заказанных кусков была равна 1). Мысленно разобьём торт на 16 равных квадратов и отметим на торте все 9 вершин этих квадратов, не лежащих на границе торта (см. рис. 3). Тогда строго внутри любого квадратного куска площади x будет лежать одна из отмеченных точек, то есть можно вырезать не больше девяти таких кусков. Значит, хотя бы шестерым детям желаемых кусков не достанется.

Осталось доказать, что 12 детей всегда смогут получить желаемое. Пусть $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_{18}$ — длины сторон кусков, которые хотят получить дети, то есть

$$a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_{18}^2 = 1.$$

Покажем, что из квадрата можно вырезать куски со сторонами $a_7, a_8, \ldots, a_{18}$.

Для этого нам потребуются неравенства

$$a_7 + a_{10} + a_{13} + a_{16} \leqslant 1 \quad \text{и} \quad a_7 + a_8 + a_9 \leqslant 1. \qquad (*)$$

Для доказательства первого неравенства заметим, что

$$1 \geqslant a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_{16}^2 \geqslant 4a_4^2 + 4a_8^2 + 4a_{12}^2 + 4a_{16}^2 \geqslant$$
$$\geqslant 4(a_7^2 + a_{10}^2 + a_{13}^2 + a_{16}^2) \geqslant (a_7 + a_{10} + a_{13} + a_{16})^2;$$

в последнем переходе мы воспользовались неравенством между средним квадратичным и средним арифметическим. Второе неравенство доказывается аналогично:

$$1 \geqslant a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_9^2 \geqslant 3a_3^2 + 3a_6^2 + 3a_9^2 \geqslant$$
$$\geqslant 3(a_7^2 + a_8^2 + a_9^2) \geqslant (a_7 + a_8 + a_9)^2.$$

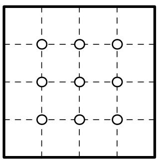

Рис. 3

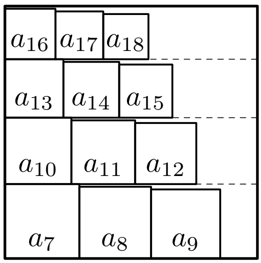

Рис. 4

Из неравенств $(*)$ следует, что можно разрезать торт на горизонтальные полосы высот, не меньших a_7, a_{10}, a_{13} и a_{16} соответственно, и в i-ю полосу уложить квадраты со сторонами a_{3i+4}, a_{3i+5} и a_{3i+6}, как показано на рис. 4.

Критерии оценивания работ 9 класса

1 задача

- Решение опирается на то, что главные делители числа n равны n/p_1 и n/p_2, где p_1 и p_2 — простые числа; в этом предположении задача решена верно: 1 *балл.*
- Решение состоит в разборе трёх или четырёх случаев (a/p, a/q и a/p, a/p^2 комбинируются с b/r, b/s и b/r, b/r^2), которые явно выделены в тексте; один случай рассмотрен неверно, а остальные верно: 4 *балла.*
- Решение состоит в разборе двух или трёх относительно равноценных по сложности случаев, которые явно выделены в тексте, и не подпадают под предыдущий критерий; один случай рассмотрен неверно, а остальные верно: *до* 3 *баллов.*

  Например: пусть минимальные простые множители входят в канонические разложения данных чисел в степенях x и y, и рассматриваются случаи; $x = 1$, $y = 1$; $x > 1$, $y > 1$; $x = 1$, $y > 1$; $x > 1$, $y = 1$.
- Ошибки или существенные пробелы в обосновании верных фактов о делимости: *снимается* 1 *балл.*

2 задача

- Переформулировки условия со ссылками на известные теоремы, но без содержательных продвижений — 0 *баллов.*
- Угадан верный ответ без его обоснования — 0 *баллов.*
- Найдены две пары параллельных прямых, образующих параллелограмм, без дальнейших продвижений — 0 *баллов.*
- Двоякое (или неясное) определение точки M (см. решение 1), без доказательства равносильности определений, при наличии всех верных этапов решения в остальном — 4 *балла.*
- Ошибка в окончательном подсчёте отношения при верной последовательности шагов решения — *снимается* 1 *балл.*
- Верное счётное решение, в котором пропущено обоснование корректности деления — *снимается* 1 *балл.*

3 задача

- Рассуждения, связанные с рассмотрением степеней вхождения 2 и 3 в числа последовательности — 0 *баллов.*
- Рассмотрены частные случаи (например, когда все числа в 2 раза меньше предыдущих) — 0 *баллов.*

4 задача

(×) Только ответ — 0 *баллов.*
Использование в примере кусков нулевой площади *не приводит к снятию баллов.*

Общие принципы. Решение состоит из двух частей: «Пример» (то есть доказательство того, что $k \leqslant 12$) и «Оценка» (доказательство того, что $k \geqslant 12$). Пример оценивается *из* 3 *баллов*, оценка — *из* 4 *баллов*; баллы за эти две части складываются.

Если в работе доказывается **неточное** неравенство — например, $k \leqslant 13$ в примере или $k \geqslant 11$ в оценке, за соответствующую часть ставится *не более* 1 *балла.*

Пример ($k \leqslant 12$, *из* 3 *баллов*).
(П1) Приведён пример, в котором нельзя выдать квадраты более, чем 12 детям (возможно, с указанием вида «из этих 15 квадратов не удастся вырезать более 9») — 1 *балл.*
(П2) Полное обоснование того, что пример работает — +2 *балла.*

(П3) Полное доказательство отсутствует, но чётко указана верная идея такого обоснования — $+1$ *балл вместо* $+2$. Примеры применения этого критерия см. ниже в разделе [П$*$].

(П0) Если приведённый пример доказывает **неточное** неравенство ($k \leqslant 13$ или хуже), 1 *балл* можно получить **только** в случае, если этот пример полностью обоснован, **и при этом** это обоснование содержит идеи, работающие в общем случае. Примеры применения этого критерия см. ниже в разделе [П$**$].

Оценка ($k \geqslant 12$, *из* 4 *баллов*). При доказательстве **неточной** оценки ($k \geqslant 11$ или хуже), или при доказательстве точной оценки, но с неверной конструкцией, за оценку ставится *не более* 1 *балла.*

(О1) Приведена верная конструкция без обоснования, что она работает (либо с неверным обоснованием) — 1 *балл.*

(О2) В верной оценке не доказываются несложные, но неочевидные неравенства — *снимается* 1 *балл.* Примеры применения этого критерия см. ниже в разделе [О$*$].

(О0) При отсутствии верной конструкции выписываются неравенства, полезные при доказательстве верной конструкции — 1 *балл.* Примеры применения этого критерия см. ниже в разделе [О$**$].

[П$*$]: примеры применения критерия (П3).

Балл *добавляется* за следующие продвижения:

• Высказано соображение, что каждая прямая, параллельная сторонам квадрата, пересекает не более трёх «больших» квадратов.

• Доказательство сведено к факту «Из 10 равных отрезков на прямой найдутся либо 4 попарно непересекающихся, либо 4 имеющих общую точку».

Если не сказано, как из этих соображений выводить доказательство, третьего балла за пример не добавляется.

Балл *не добавляется* за следующее продвижение:

• На сторону влезет не более трёх больших квадратов.

[П$**$]: примеры применения критерия (П0).

Балл *добавляется* в случае полного доказательства и использованием следующих аргументов (или их аналогов для большего числа квадратов).

• Два квадрата со сторонами $> \frac{1}{2}$ не влезут, **так как** они оба содержат внутри центр торта;

• Два квадрата со сторонами $> \frac{1}{2}$ не влезут, **так как** средняя линия торта пересекает оба, и эти пересечения перекроются.

Балл *не добавляется* в случае доказательства и с использованием следующих аргументов (или аналогичных им):

• Два квадрата со сторонами $> \frac{1}{2}$ не влезут, **так как** их проекции на каждую сторону пересекаются, и потому у квадратов есть общая внутренняя точка.

• Если все квадраты равны, то 17 таких квадратов не влезут, **так как** сумма длин их проекций на сторону больше 4, и потому какая-то вертикальная прямая пересечёт пять из них.

• Если все квадраты равны, то 17 таких квадратов не влезут, **так как** каждая горизонтальная прямая пересекает не более 4 из них, и потому суммарная занятая площадь не превосходит $\frac{4}{\sqrt{18}} < \frac{17}{18}$.

Естественно, приведённые выше факты, заявленные без доказательства, также оцениваются в 0 *баллов.*

В дальнейшем тексте через $a_1 \geqslant \ldots \geqslant a_{18}$ обозначены стороны запрошенных кусков.

[О$*$]: примеры применения критерия (О2).

Балл *снимается* за отсутствие доказательства неравенства $4(a_7^2 + a_{10}^2 + a_{13}^2 + a_{16}^2) \leqslant a_1^2 + \cdots + a_{16}^2$.

Балл *не снимается* за отсутствие доказательства неравенства $3(a_7^2 + a_8^2 + a_9^2) \leqslant a_1^2 + \cdots + a_9^2$.

[О$**$]: примеры применения критерия (О0).

Балл *добавляется* за доказательство одного (или нескольких) из следующих неравенств (или аналогичных им):

$$a_7 + a_8 + a_9 \leqslant 1; \quad a_8 + a_9 + a_{10} \leqslant 1; \quad a_7 + a_{10} + a_{13} + a_{16} \leqslant 1.$$

Балл *не добавляется* за доказательство одного (или нескольких) из следующих неравенств (возможно, с последующим построением неточных примеров на основе этих неравенств):

$$a_{15} + a_{16} + a_{17} + a_{18} \leqslant 1; \quad a_9 + a_{10} + a_{11} \leqslant 1; \quad a_3 + a_4 \leqslant 1; \quad a_9 \leqslant 1/3; \quad a_k \leqslant 1/\sqrt{k}.$$

5 задача

Критериев нет.

6 задача

- В правильном решении забыт или неверно рассмотрен случай $c \geqslant 2$ — *снимался* 1 *балл.*
- За пример для $a = 1000 \cdot 1001$ — *ставилось* 2 *балла.*
- За верное доказательство неравенства $-b \geqslant 2001$ (неравенство должно явно присутствовать в тексте работы) — *ставилось* 2 *балла.*
- Неравенства $-b > 2000$, $b^2 \geqslant 4\,000\,004$ и т. п. не оценивались.
- Если в решении был и пример и доказанное неравенство $-b \geqslant 2001$, то вместе за это продвижение *ставилось* 3 *балла.*
- Любые рассмотрения рациональных корней трехчлена, основанные на соображениях, связанных с делимостью, оценивались в 0 *баллов.*

7 задача

Критическим множеством вершин здесь называется множество из k вершин с $5k + 10$ ребрами между ними.

- Доказано, в форме леммы или иным способом, что пересечение **или** объединение двух критических множеств тоже является критическим: 2 *балла.*
- Во в целом верном решении не доказано, что существует требуемая пара вершин, ещё не соединённая ребром (но существование такой пары легко доказывается): *снимается* 1 *балл.*

  Этот балл также снимается, если в этом доказательстве присутствует грубая ошибка, например, при подсчёте числа уже проведённых рёбер неверно (дважды) учитываются рёбра между вершинами вне максимального критического множества.
- В решении выбирается пара не соединённых вершин, которой на самом деле **может** не существовать: *не более* 4 *баллов.*
- Если в работе доказана лемма о пересечении и объединении двух критических множеств и на её основе установлено существование критического множества, содержащего **все** критические множества: 3 *балла.*
- В работе лемма об объединении доказана неверно, но из неё выводится полное решение: 3 *балла.*
- Делается шаг индукции в предположении существования вершины степени не выше 5, или решение опирается на утверждение о существование вершины степени не выше 5: 0 *баллов.*
- Определение понятия критического множества, база индукции, утверждения о том, что в критическом графе не меньше 13 рёбер и подобные технические действия сами по себе: 0 *баллов.*
- Начата работа с пересечением и объединением критических множеств без доказательства леммы и дальнейших продвижений: 0 *баллов.*

8 задача

В тексте использованы обозначения авторского решения.

- Не доведённый до конца координатный (векторный, тригонометрический, комплексный) счёт — 0 *баллов.*
- Построен вспомогательный параллелограмм $BC'B'C$ и задаче сведена к доказательству параллельности $B'C$ и A_0K' — 1 *балл.*
- Задача сведена к доказательству того, что точки A_0, K', N лежат на одной прямой — 1 *балл.*
- Доказана лемма о том, что вписанные (или вневписанные) окружности треугольников ABC и A_0BC касаются BC в одной и той же точке — 2 *балла.*
- Упомянутые выше баллы могут суммироваться.