7 класс (решения)

Задача 7.1. Денис загадал четыре различных натуральных числа. Он утверждает, что

- произведение наименьшего и наибольшего чисел равно 32;
- произведение двух оставшихся чисел равно 14.

Чему равна сумма всех четырёх чисел?

Ответ: 42.

Решение. Есть два способа представить число 14 в виде произведения двух чисел: $1 \cdot 14$ и $2 \cdot 7$; поэтому второе и третье по величине числа равны 1 и 14 или 2 и 7. Первый случай нам не подходит, так как 1 не может быть вторым по величине числом. Тогда второе по величине число равно 2, а третье по величине — 7.

Так как наши четыре числа различны, первое по величине (наименьшее) число равно 1. Тогда наибольшее число равно 32. Отсюда нетрудно найти сумму всех чисел. □

Задача 7.2. Вдоль дороги стоят дома Андрея, Бори, Васи и Гены (именно в таком порядке). Расстояние между домами Андрея и Гены равно 2450 метрам. Однажды ребята решили устроить забег на 1 км. Они поставили старт на полпути от дома Андрея до дома Васи. При этом финиш оказался ровно на полпути от дома Бори до дома Гены. Чему равно расстояние от дома Бори до дома Васи? Ответ укажите в метрах.

Ответ: 450.

Решение. Будем считать, что дорога идёт от дома Андрея на восток к дому Гены; тогда мы можем сказать, что дом Гены восточнее дома Васи, а дом Бори восточнее дома Андрея. Это означает, что финиш (середина между домами Бори и Гены) восточнее старта (середина между домами Андрея и Васи).

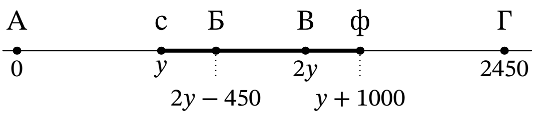


Рис. 1: к решению задачи 7.2

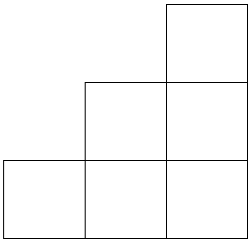
Пусть старт находится на расстоянии y метров к востоку от дома Андрея, тогда финиш — на расстоянии $y+1000$ (рис. 1). Если расстояние от дома Бори до дома Андрея обозначить за b, то разность $(y + 1000) - b$ равна расстоянию от дома Бори до финиша, а разность $2450 - (y + 1000)$ равна расстоянию от дома Гены до финиша. Они равны:

$$(y + 1000) - b = 2450 - (y + 1000),$$

откуда нетрудно извлечь $b = 2y - 450$.

С другой стороны, расстояние от дома Васи до дома Андрея равно $2y$, так как старт находится посередине между ними. Это означает, что расстояние от дома Васи до дома Бори равно 450. □

Задача 7.3. Числа 1, 2, 4, 5, 8, 10 расставили в клетки фигуры, изображённой на рисунке, так, чтобы суммы чисел во всех столбцах (включая столбец из одной клетки) были равны. Какое число может стоять в самой верхней клетке? Укажите все возможные варианты.



Ответ: 1, 4 или 5.

Решение. Общая сумма чисел равна $1 + 2 + 4 + 5 + 8 + 10 = 30$. Получается, что сумма чисел в каждом столбце равна $\frac{30}{3} = 10$; в частности, в столбце из одной клетки точно стоит число 10.

Теперь осталось заметить, что из оставшихся пяти чисел есть только один способ выбрать два с суммой 10 — это $2 + 8$. Они и будут стоять во втором столбце.

Оставшиеся три числа будут стоять в третьем столбце в любом порядке, поэтому в верхней клетке может стоять 1, 4 или 5. □

Задача 7.4. В понедельник 5 человек из класса получили пятёрки по математике, во вторник пятёрки получили 8 человек, в среду — 6 человек, в четверг — 4 человека, в пятницу — 9 человек. Никто из учеников не получал пятёрки два дня подряд. Какое наименьшее количество учеников могло учиться в классе?

Ответ: 14.

Решение. Рассмотрим пары подряд идущих дней.

- За понедельник и вторник пятёрки получили $5 + 8 = 13$ человек.
- За вторник и среду пятёрки получили $8 + 6 = 14$ человек.

- За среду и четверг пятёрки получили $6 + 4 = 10$ человек.
- За четверг и пятницу пятёрки получили $4 + 9 = 13$ человек.

Так как никто не мог получать пятёрку два дня подряд, количество учеников в классе не меньше, чем максимальное из полученных чисел. То есть в классе хотя бы 14 учеников.

Приведём пример, как четырнадцать учеников могли получать пятёрки. Пронумеруем детей от 1 до 14.

- В понедельник пятёрки получили ученики 10, 11, 12, 13 и 14.
- Во вторник пятёрки получили ученики 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 и 8.
- В среду пятёрки получили ученики 9, 10, 11, 12, 13 и 14.
- В четверг пятёрки получили ученики 1, 2, 3 и 4.
- В пятницу пятёрки получили ученики 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13 и 14. □

Задача 7.5. На собрании совета племени по очереди выступали 60 человек. Каждый из них сказал только одну фразу. Первые трое выступавших сказали одно и то же: «Я всегда говорю правду!». Следующие 57 выступавших тоже сказали одинаковые фразы: «Среди предыдущих трёх выступавших правду сказали ровно два человека.» Какое наибольшее количество выступавших могло сказать правду?

Ответ: 45.

Решение. Заметим, что среди любых четырёх подряд идущих выступающих хотя бы один соврал (если первые три из них сказали правду, то четвёртый точно соврал). Разбив 60 человек на 15 четвёрок последовательных выступающих, получим, что не менее 15 человек соврали, то есть не более 45 человек сказали правду.

Чтобы построить пример, предположим, что первые трое в каждой четвёрке (в указанном выше разбиении) говорят правду, а четвёртый — лжёт. Легко понять, что эта ситуация соответствует условию. □

Задача 7.6. Точки D и E отмечены на сторонах AC и BC треугольника ABC соответственно. Известно, что $AB = BD$, $\angle ABD = 46^\circ$, $\angle DEC = 90^\circ$. Найдите $\angle BDE$, если известно, что $2DE = AD$.

Ответ: 67°.

Решение. Проведём высоту BM в треугольнике ABD. Так как этот треугольник равнобедренный, M делит AD пополам (рис. 7.6). Получается, что $MD = AD/2 = DE$.

Тогда прямоугольные треугольники BDM и BDE равны по катету ($DM = DE$) и гипотенузе (BD — общая). Отсюда нетрудно найти искомый угол:

$$\angle BDE = \angle BDA = \frac{180^\circ - \angle ABD}{2} = \frac{180^\circ - 46^\circ}{2} = 67^\circ. \quad \square$$

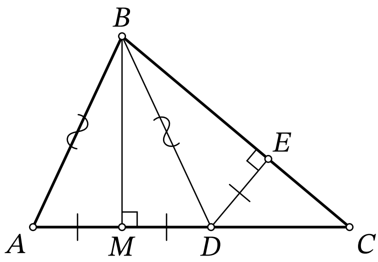


Рис. 2: к решению задачи 7.6

Задача 7.7. В кабинете есть несколько одиночных парт (за каждой партой может сидеть не более одного человека; других парт в кабинете нет). Во время перемены четверть учащихся вышли в коридор, а в кабинете осталось количество людей, равное 4/7 от общего числа парт. Сколько парт в аудитории, если их не более 30?

Ответ: 21.

Решение. Заметим, что количество оставшихся учащихся составляет $\frac{3}{4}$ от изначального, то есть должно делиться на 3. Обозначим его за $3x$. Пусть y — количество парт. Тогда

$$3x = \frac{4}{7}y,$$

откуда $21x = 4y$. Так как 4 и 21 взаимно просты, то y делится на 21. Из условия задачи мы знаем, что $y \leqslant 30$, поэтому $y = 21$. $\square$

Задача 7.8. Таня и Вера играют в игру. У Тани есть карточки с числами от 1 до 30. Она расставляет их в некотором порядке по кругу. Для каждых двух соседних чисел Вера считает их разность, вычитая из большего числа меньшее, и выписывает получившиеся 30 чисел себе в блокнот. После этого Вера отдает Тане количество конфет, равное наименьшему числу из выписанных в блокнот. Таня выкладывает карточки так, чтобы получить как можно больше конфет. Какое наибольшее количество конфет она может получить?

Ответ: 14.

Решение. Докажем, что Таня не сможет получить 15 конфет. Посмотрим на карточку с числом 15. Число 15 отличается от всех оставшихся чисел, кроме числа 30, не более, чем на 14. Таким образом, хотя бы одна из разностей, в которых участвует число 15, будет не более 14.

Приведём пример расстановки, когда Таня сможет получить 14 конфет. Расставим по кругу числа в следующем порядке: 1, 16, 2, 17, 3, 18, ..., 14, 29, 15, 30. $\square$